

Коды Рида-Маллера

Код Рида-Маллера (4,1,4)

Составление производящей матрицы кода Рида-Маллера (4,1,4)

	c_0	c_1	c_2	c_3	
V^0	1	1	1	1	a_0

Кодирование информационных комбинаций кодом Рида-Маллера (4,1,4)

Кодовые символы c_i определяются из соответствующего столбца производящей матрицы теми информационными символами a_i , которые имеют значение "1":

- $c_0 = a_0;$
- $c_1 = a_0;$
- $c_2 = a_0;$
- $c_3 = a_0;$

Определение кодового расстояния d кода Рида-Маллера (4,1,4)

Информационные комбинации кода (4,1,4)	Разрешенные комбинации кода (4,1,4)				Метрика Хемминга
a_0	c_0	c_1	c_2	c_3	
0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	4

Декодирование кода Рида-Маллера (4,1,4)

Информационный символ определяется из следующего соотношения:

$$a_0 = c_0 = c_1 = c_2 = c_3;$$

Пример декодирования кодовой комбинации $C_1 = 1111$ с ошибками кратности 0,1,2,3

Кратность ошибки	Кратность 0				Кратность 1				Кратность 2				Кратность 3				
Кодовая комбинация	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3	
	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0
Результат декодирования	a_0				a_0				a_0				a_0				
	1				1				?				0				

Пример декодирования кодовой комбинации $C_2 = 0000$ с ошибками кратности 0,1,2,3

Кратность ошибки	Кратность 0				Кратность 1				Кратность 2				Кратность 3			
Кодовая комбинация	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_0	c_1	c_2	c_3
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
Результат декодирования	a_0				a_0				a_0				a_0			
	0				0				?				1			

Код Рида-Маллера (4,3,2)

Составление производящей матрицы кода Рида-Маллера (4,3,2)

	c_0	c_1	c_2	c_3	
V^0	1	1	1	1	a_0
V^1	0	1	0	1	a_1
	0	0	1	1	a_2

Кодирование информационных комбинаций кодом Рида-Маллера (4,3,2)

Кодовые символы определяются из следующих соотношений:

- $c_0 = a_0;$
- $c_1 = a_0 + a_1;$
- $c_2 = a_0 + a_2;$
- $c_3 = a_0 + a_1 + a_2;$

Определение кодового расстояния d кода Рида-Маллера (4,3,2)

Информационные комбинации кода (4,3,2)			Разрешенные комбинации кода (4,3,2)				Метрика Хемминга
a ₀	a ₁	a ₂	c ₀	c ₁	c ₂	c ₃	
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	1	2
0	1	0	0	1	0	1	2
0	1	1	0	1	1	0	2
1	0	0	1	1	1	1	4
1	0	1	1	1	0	0	2
1	1	0	1	0	1	0	2
1	1	1	1	0	0	1	2

Декодирование кода Рида-Маллера (4,3,2)

Определение парных разрядов и составление проверочных уравнений

	c ₀	c ₁	c ₂	c ₃	
V ⁰	1	1	1	1	a ₀
V ¹	0	1	0	1	a ₁
	0	0	1	1	a ₂

Информационные символы a₁ и a₂, соответствующие вектору первого порядка V¹, определяются парными разрядами в соответствующей строке производящей матрицы:

$$a_1 = c_0 + c_1 = c_2 + c_3;$$

$$a_2 = c_0 + c_2 = c_1 + c_3;$$

Информационный символ a₀, соответствующий вектору нулевого порядка V⁰, определяется после декодирования символов a₁ и a₂, соответствующих векторам первого порядка V¹, путем сложения кодовой комбинации C с теми векторами a_i (i = 1,2), которые при декодировании дали значение "1". В полученной кодовой комбинации C' символ a₀ определяется из следующего соотношения:

$$a_0 = c_0 = c_1 = c_2 = c_3;$$

Пример декодирования кодовой комбинации 1111 с ошибками кратности 0,1,2

Кратность ошибки	Кратность 0				Кратность 1				Кратность 2			
	c ₀	c ₁	c ₂	c ₃	c ₀	c ₁	c ₂	c ₃	c ₀	c ₁	c ₂	c ₃
Кодовая комбинация	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
Результат декодирования	a ₀	a ₁	a ₂	a ₀	a ₁	a ₂	a ₀	a ₁	a ₀	a ₁	a ₂	a ₀
	1	0	0	?	?	?	0	1	0	1	1	0

Определение значения символа a₀ при ошибке нулевой кратности:

Поскольку значение декодированных символов a₁ и a₂ есть "0", то символ a₀ определяется непосредственно из кодовой комбинации 1111 по большинству однотипных символов. В нашем случае a₀ = 1.

Определение значения символа a₀ при ошибке второй кратности:

Поскольку значение декодированных символов a₁ и a₂ есть "1", то для декодирования символа a₀ кодовую комбинацию C = 1111 необходимо преобразовать в комбинацию C' путем сложения по модулю два со строками производящей матрицы кода, соответствующих символам a₁ и a₂:

$$\begin{array}{r}
 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\
 \oplus \\
 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\
 \oplus \\
 \hline
 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\
 \hline
 0 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

В полученной кодовой комбинации C' = 0000 решение о значении символа a₀ также определяется по большинству однотипных символов. В нашем случае значение a₀ = 0 неверно определяется вследствие возникновения ошибки, превосходящей по кратности корректирующие способности кода (4,3,2)

Код Рида-Маллера (8,4,4)

Составление производящей матрицы кода Рида-Маллера (8,4,4)

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
V^0	1	1	1	1	1	1	1	1	a_0
V^1	0	1	0	1	0	1	0	1	a_1
	0	0	1	1	0	0	1	1	a_2
	0	0	0	0	1	1	1	1	a_3

Кодирование информационных комбинаций кодом Рида-Маллера (8,4,4)

Кодовые символы определяются из следующих соотношений:

- $c_0 = a_0;$
- $c_1 = a_0 + a_1;$
- $c_2 = a_0 + a_2;$
- $c_3 = a_0 + a_1 + a_2;$
- $c_4 = a_0 + a_3;$
- $c_5 = a_0 + a_1 + a_3;$
- $c_6 = a_0 + a_2 + a_3;$
- $c_7 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3;$

Определение кодового расстояния d кода Рида-Маллера (8,4,4)

Информационные комбинации кода (8,4,4)				Разрешенные комбинации кода (8,4,4)								Метрика Хемминга
a_0	a_1	a_2	a_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	4
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	4
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	4
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	4
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	4
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	4
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	4
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	8
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	4
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	4
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	4
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	4
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	4
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	4
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	4

Декодирование кода Рида-Маллера (8,4,4)

Определение парных разрядов и составление проверочных уравнений

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
V^0	1	1	1	1	1	1	1	1	a_0
V^1	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	a_1
	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	a_2
	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	a_3

Информационные символы $a_1 \div a_3$, соответствующие вектору первого порядка V^1 , определяются парными разрядами в соответствующей строке производящей матрицы:

- $a_1 = c_0 + c_1 = c_2 + c_3 = c_4 + c_5 = c_6 + c_7;$
- $a_2 = c_0 + c_2 = c_1 + c_3 = c_4 + c_6 = c_5 + c_8;$
- $a_3 = c_0 + c_4 = c_1 + c_5 = c_2 + c_6 = c_3 + c_7;$

Информационный символ a_0 , соответствующий вектору нулевого порядка V^0 , определяется после декодирования символов a_1, a_2, a_3 соответствующих векторам первого порядка V^1 , путем сложения кодовой комбинации C с теми векторами a_i ($i = 1 \div 3$), которые при декодировании дали значение "1". В полученной кодовой комбинации C' символ a_0 определяется большинством однотипных символов;

Пример декодирования кодовой комбинации 11111111 с ошибками кратности 0 и 1

Кратность ошибки	Кратность 0								Кратность 1							
	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
Кодовая комбинация	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Результат декодирования	a_0		a_1		a_2		a_3		a_0		a_1		a_2		a_3	
	1		0		0		0		1		0		0		0	

Пример декодирования кодовой комбинации 11111111 с ошибками кратности 2 и 3

Кратность ошибки	Кратность 2								Кратность 3							
	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
Кодовая комбинация	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
Результат декодирования	a_0		a_1		a_2		a_3		a_0		a_1		a_2		a_3	
	?		?		?		?		0		1		1		0	

Определение значения символа a_0 при ошибке нулевой и первой кратности:

Поскольку значение декодированных символов a_1, a_2, a_3 есть "0", то символ a_0 определяется непосредственно из кодовой комбинации (11111111 в случае ошибки нулевой кратности, 11111110 в случае ошибки первой кратности) по большинству однотипных символов. В нашем случае $a_0 = 1$.

Определение значения символа a_0 при ошибке третьей кратности:

Поскольку значение декодированных символов a_1 и a_2 есть "1", то для декодирования символа a_0 кодовую комбинацию $C = 01101110$ необходимо преобразовать в комбинацию C' путем сложения по модулю два со строками производящей матрицы кода, соответствующих символам a_1 и a_2 :

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 \oplus & & & & & & & \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \oplus & & & & & & & \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

В полученной кодовой комбинации $C' = 00001000$ решение о значении символа a_0 также определяется по большинству однотипных символов. В нашем случае восстановленное значение $a_0 = 0$ не будет соответствовать закодированному информационному символу вследствие того, что кодовое сообщение было принято с ошибками кратности, превосходящей корректирующие способности кода (8,4,4)

Код Рида-Маллера (16,5,8)

Составление производящей матрицы кода Рида-Маллера (16,5,8)

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	
V^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a_0
V^1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	a_1
	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	a_2
	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	a_3
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	a_4

Кодирование информационных комбинаций кодом Рида-Маллера (16,5,8)

Кодовые символы определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0; \\ c_1 &= a_0 + a_1; \\ c_2 &= a_0 + a_2; \\ c_3 &= a_0 + a_1 + a_2; \\ c_4 &= a_0 + a_3; \\ c_5 &= a_0 + a_1 + a_3; \\ c_6 &= a_0 + a_2 + a_3; \\ c_7 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3; \\ c_8 &= a_0 + a_4; \\ c_9 &= a_0 + a_1 + a_4; \\ c_{10} &= a_0 + a_2 + a_4; \\ c_{11} &= a_0 + a_1 + a_2 + a_4; \\ c_{12} &= a_0 + a_3 + a_4; \\ c_{13} &= a_0 + a_1 + a_3 + a_4; \\ c_{14} &= a_0 + a_2 + a_3 + a_4; \\ c_{15} &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \end{aligned}$$

Определение кодового расстояния d кода Рида-Маллера (16,5,8) (Из $2^5=32$ разрешенных комбинаций приведены только 8)

Информационные комбинации кода (16,5,8)					Разрешенные комбинации кода (16,5,8)															Метрика Хемминга			
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0		8
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1			8
0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0			8
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			16
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0			8
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0			8
1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1			8

Декодирование кода Рида-Маллера (16,5,8)

Определение парных разрядов и составление проверочных уравнений

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	
V^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a_0
V^1	<u>0</u>	<u>1</u>	\emptyset	\neq	<u>0</u>	<u>1</u>	\emptyset	\neq	0	1	0	1	$0''$	$1''$	$0'$	$1'$	a_1
	<u>0</u>	\emptyset	<u>1</u>	\neq	<u>0</u>	\emptyset	<u>1</u>	\neq	0	0	1	1	$0''$	$0'$	$1''$	$1'$	a_2
	<u>0</u>	\emptyset	0	\emptyset	<u>1</u>	\neq	<u>1</u>	\neq	0	0	$0''$	$0'$	1	1	$1''$	$1'$	a_3
	<u>0</u>	\emptyset	0	\emptyset	0	0	$0''$	$0'$	<u>1</u>	\neq	<u>1</u>	\neq	1	1	$1''$	$1'$	a_4

Информационные символы $a_1 \div a_4$, соответствующие вектору первого порядка V^1 , определяются парными разрядами в соответствующей строке производящей матрицы:

$$a_1 = c_0 + c_1 = c_2 + c_3 = c_4 + c_5 = c_6 + c_7 = c_8 + c_9 = c_{10} + c_{11} = c_{12} + c_{13} = c_{14} + c_{15};$$

$$a_2 = c_0 + c_2 = c_1 + c_3 = c_4 + c_6 = c_5 + c_7 = c_8 + c_{10} = c_9 + c_{11} = c_{12} + c_{14} = c_{13} + c_{15};$$

$$a_3 = c_0 + c_4 = c_1 + c_5 = c_2 + c_6 = c_3 + c_7 = c_8 + c_{12} = c_9 + c_{13} = c_{10} + c_{14} = c_{11} + c_{15};$$

$$a_4 = c_0 + c_8 = c_1 + c_9 = c_2 + c_{10} = c_3 + c_{11} = c_4 + c_{12} = c_5 + c_{13} = c_6 + c_{14} = c_7 + c_{15};$$

Информационный символ a_0 , соответствующий вектору нулевого порядка V^0 , определяется после декодирования символов a_1, a_2, a_3, a_4 соответствующих векторам первого порядка V^1 , путем сложения кодовой комбинации C' с теми векторами a_i ($i = 1 \div 4$), которые при декодировании дали значение "1". В полученной кодовой комбинации C'' символ a_0 определяется большинством однотипных символов;

Пример декодирования кодовой комбинации 0000111111110000 с ошибкой кратности 0

Кодовая комбинация	c ₀	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃	c ₁₄	c ₁₅
	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
Результат декодирования	a ₀				a ₁				a ₂				a ₃		a ₄	
	0				0				0				1		1	

Определение значения символа a₀:

Поскольку значение декодированных символов a₃ и a₄ есть "1", то для декодирования символа a₀ кодовую комбинацию C = 0000111111110000 необходимо преобразовать в комбинацию C' путем сложения по модулю два со строками производящей матрицы кода, соответствующих символам a₃ и a₄:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \oplus & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \oplus & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

В полученной кодовой комбинации C' = 0000000000000000 решение о значении символа a₀, как и всегда, определяется по большинству однотипных символов. В нашем случае восстановленное значение a₀ = 0, что соответствует закодированному информационному символу.

Пример декодирования кодовой комбинации 0000000111110000 с ошибкой кратности 3

Кодовая комбинация	c ₀	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃	c ₁₄	c ₁₅
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
Результат декодирования	a ₀				a ₁				a ₂				a ₃		a ₄	
	0				0				0				1		1	

Определение значения символа a₀:

Поскольку значение декодированных символов a₃ и a₄ есть "1", то для декодирования символа a₀ кодовую комбинацию C = 0000111111110000 необходимо преобразовать в комбинацию C' путем сложения по модулю два со строками производящей матрицы кода, соответствующих символам a₃ и a₄:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \oplus & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \oplus & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

В полученной кодовой комбинации C' = 0000111000000000 решение о значении символа a₀, как и всегда, определяется по большинству однотипных символов. В нашем случае восстановленное значение a₀ = 0, что соответствует закодированному информационному символу.