Блочные ортогональные коды (2^m,m, 2^m/2).

При m = 3 порождающая матрица G задает ортогональный код (8,3,4) и имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Кодовая комбинация получается путем умножения информационных символов a_i (i=0÷2) на соответствующие строки порождающей матрицы кода и последующего сложения всех строк по модулю два.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times a_0 \\ \times a_1 \\ \times a_2 \end{matrix}$$

Например, при поступлении информационной комбинации 101 на вход ортогонального кодера будет сформирована следующая кодовая комбинация C:

$$G_{101} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ \times 0 \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \oplus & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & - & - & - & - & - & - & - & - \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C = 01011010

Вычисление кодового расстояния d (8,3,4)-ортогонального кода

Информационные комбинации кода (8,3,4)	Разрешенные комбинации кода (8,3,4)	Метрика Хемминга
000	00000000	
001	00001111	4
010	00110011	4
011	00111100	4
100	01010101	4
101	01011010	4
110	01100110	4
111	01101001	4

Декодирование ортогонального кода (8,3,4) по алгоритму максимального правдоподобия при возникновении ошибок кратности i = 0,1,2

Декодирование при возникновении ошибки нулевой кратности в кодовой комбинации C = 01011010

Разрешенные комбинации кода (8,3,4)	Информационные комбинации, соответствующие разрешенным комбинациям кода (8,3,4)	Метрика Хемминга между разрешенными комбинациями кода и принятой кодовой комбинацией C = 01011010
00000000	000	4
00001111	001	4
00110011	010	4
00111100	011	4
01010101	100	4
01011010	101	0
01100110	110	4
01101001	111	4

Декодирование при возникновении ошибки первой кратности в кодовой комбинации C^{*} = 01011011

Разрешенные комбинации кода (8,3,4)	Информационные комбинации, соответствующие разрешенным комбинациям кода (8,3,4)	Метрика Хемминга между разрешенными комбинациями кода и принятой кодовой комбинацией C = 01011011
00000000	000	5
00001111	001	3
00110011	010	3
00111100	011	5
01010101	100	3
01011010	101	1
01100110	110	3
01101001	111	3

Декодирование при возникновении ошибки второй кратности в кодовой комбинации C^{**} = 00011011

Разрешенные комбинации кода (8,3,4)	Информационные комбинации, соответствующие разрешенным комбинациям кода (8,3,4)	Метрика Хемминга между разрешенными комбинациями кода и принятой кодовой комбинацией C = 00011011
00000000	000	4
00001111	001	2
00110011	010	2
00111100	011	4
01010101	100	4
01011010	101	2
01100110	110	6
01101001	111	4

При возникновении ошибки второй кратности декодер не может корректно осуществить декодирование, поскольку возникшая ошибка превышает кратность исправляемой кодом ошибки $t_и$=1, однако он может зафиксировать факт возникновения ошибки второй кратности.

Укороченные ортогональные (симплексные) коды.

Из ортогонального кода (2^m,m, $2^m/2$) с любым значением m может быть получен укороченный (симплексный) код (2^m-1,m, $2^m/2$) путем отбрасывания первого (нулевого) столбца без уменьшения кодового расстояния

При m = 3 порождающая матрица G_c задает симплексный код (7,3,4) и имеет следующий вид:

$$G_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Кодовая комбинация получается путем умножения информационных символов a_i (i=0÷2) на соответствующие строки порождающей матрицы кода и последующего сложения всех строк по модулю два.

$$G_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times a_0 \\ \times a_1 \\ \times a_2 \end{matrix}$$

Например, при поступлении информационной комбинации 101 на вход симплексного кодера будет сформирована следующая кодовая комбинация C:

$$G_{101} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ \times 0 \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \oplus & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & - & - & - & - & - & - & - \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C = 1011010

Вычисление кодового расстояния d (7,3,4)-симплексного кода

Информационные комбинации кода (7,3,4)	Разрешенные комбинации кода (8,3,4)	Метрика Хемминга
000	0000000	
001	0001111	4
010	0110011	4
011	0111100	4
100	1010101	4
101	1011010	4
110	1100110	4
111	1101001	4

Декодирование блочных кодов при помощи таблицы стандартного расположения.

Таблица стандартного расположения для (7,3,4)-симплексного кода будет иметь следующий вид

Разрешенные кодовые комбинации							
0000000	0001111	0110011	0111100	1010101	1011010	1100110	1101001
0000001	0001110	0110010	0111101	1010100	1011011	1100111	1101000
0000010	0001101	0110001	0111110	1010111	1011000	1100100	1101011
0000100	0001011	0110111	0111000	1010001	1011110	1100010	1101101
0001000	0000111	0111011	0110100	1011101	1010010	1101110	1100001
0010000	0011111	0100011	0101100	1000101	1001010	1110110	1111001
0100000	0101111	0010011	0011100	1110101	1111010	1000110	1001001
1000000	1001111	1110011	1111100	0010101	0011010	0100110	0101001
0000011	0001100	0110000	0111111	1010110	1011001	1100101	1101010
0000101	0001010	0110110	0111010	1010000	1011111	1100011	1101100
0000110	0001001	0110101	0101101	1010011	1011100	1100000	1101111
0010001	0011110	0100001	0101101	1000100	1001011	1110111	1111000
0010010	0011101	0100111	0101110	1000111	1001000	1110100	1111011
0010100	0011011	0101011	0101000	1000001	1001110	1110010	1111101
0011000	0010111	1110001	0100100	1001101	1000010	1111110	0111001
1110000	0010110	0011001	0100101	1000011	0101010	1001100	1111111
Соответствующие информационные комбинации							
000	001	010	011	100	101	110	111

Таблица содержит все возможные кодовые комбинации ($2^n = 128$) и построена на основе искажения разрешенных кодовых комбинаций векторами ошибок порядка 0, 1 и 2, приведенных в нижеследующей таблице

Вектор ошибки нулевого порядка	Векторы ошибки первого порядка	Векторы ошибки второго порядка
$C_7^0 = \frac{7!}{0!\cdot 7!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 1$	$C_7^1 = \frac{7!}{1!\cdot 6!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 7$	$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$
0000000	0000001	0000011
	0000010	0000101
	0000100	0000110
	0001000	0001001
	0010000	0001010
	0100000	0001100
	1000000	0010010
		0010001
		0010100
		0011000
		0100001
		0100010
		0100100
		0101000
		0110000
		1000001
		1000010
		1000100
		1001000
		1010000
		1100000