Блочное помехоустойчивое кодирование. Коды Хемминга.

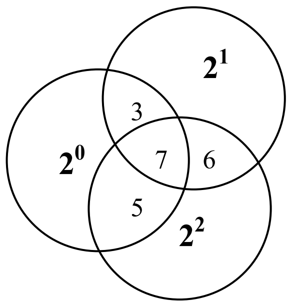
Коды Хемминга, заданные в несистематическом виде

Произвольная двоичная комбинация	1	…	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
Номер позиции в кодовом слове	16	…	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Двоичное представление номера позиции	10000	…	01011	01010	01001	01000	00111	00110	00101	00100	00011	00010	00001
Разложение номера по степеням двойки	$2^4=16$	…	$2^0+2^1+2^3=1+2+8=11$	$2^1+2^3=2+8=10$	$2^0+2^3=1+8=9$	$2^3=8$	$2^0+2^1+2^2=1+2+4=7$	$2^1+2^2=2+4=6$	$2^0+2^2=1+4=5$	$2^2=4$	$2^0+2^1=1+2=3$	$2^1=2$	$2^0=1$
Условное обозначение номера	c_4	…	a_6	a_5	a_4	c_3	a_3	a_2	a_1	c_2	a_0	c_1	c_0

В качестве контрольных символов Р.Хеммингом было предложено использовать те позиции в кодовых комбинациях, которые содержат только одну единицу (в двоичном представлении номера позиции символа). Эти позиции соответствуют номерам, кратным степени двойки: 1,2,4,8,… Каждый из контрольных символов формируется всеми информационными символами, входящими в кодовую комбинацию и содержащими единицу (опять же в двоичном представлении номера позиции символа), соответствующую контрольному символу.

Несистематический код Хемминга (7,4,3) (k = 4, r = 3, n = 7, $L_{общ} = 2^n = 128$, $L_{разр} = 2^k = 16$, R = 4/7, d=3)

Распределение сфер влияния контрольных битов для кода (7,4,3)



Проверочные символы c_i определяются информационными символами a_i из следующих соотношений:
$c_0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3$;
$c_1 = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3$;
$c_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$;

Формирование кодового слова несистематического кода Хемминга (7,4,3)
Информационное слово I: 1101
Найдем значения контрольных символов c_i:
$c_0 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$;
$c_1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$;
$c_2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$;

Номер позиции в кодовом слове	7	6	5	4	3	2	1
Условное обозначение	a_3	a_2	a_1	c_2	a_0	c_1	c_0
Значение символа	1	1	0	0	1	1	0

Кодовое 7-разрядное слово C, таким образом, будет выглядеть так: 1100110

Проверка кодового слова на наличие ошибок и декодирование информационной комбинации
Кодовое слово C с ошибкой нулевой кратности: 1100110
Проверка контрольных соотношений для каждого из проверочных символов c_i:
$c_0 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$;
$c_1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$;
$c_2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$;

Номер позиции в кодовом слове	7	6	5	4	3	2	1
Условное обозначение	a_3	a_2	a_1	c_2	a_0	c_1	c_0
Значение принятого символа	1	1	0	0	1	1	0
Результат проверки контрольных символов				0		1	0

Полное совпадение результатов проверки контрольных символов c_0, c_1 и c_2 с аналогичными контрольными символами в принятом кодовом слове C означает, что кодовое слово было принято без ошибок. Информационное слово I получается из кодового слова C путем отбрасывания контрольных разрядов: C = 110~~0~~1~~10~~ → I = 1101

Кодовое слово C^* с ошибкой первой кратности: 0100110

Проверка контрольных соотношений для каждого из проверочных символов c_i:

$c_0 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$;

$c_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$;

$c_2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$;

Номер позиции в кодовом слове	7	6	5	4	3	2	1
Условное обозначение	a_3	a_2	a_1	c_2	a_0	c_1	c_0
Значение принятого символа	0	1	0	0	1	1	0
Результат проверки контрольных символов				1		0	1

Несовпадение результатов проверки контрольных символов c_0, c_1 и c_2 с аналогичными контрольными символами в принятом кодовом слове C^* означает, что кодовое слово было принято с ошибкой. Для определения позиции искаженного символа в кодовом слове достаточно просуммировать веса искаженных контрольных символов. В нашем случае необходимо просуммировать веса всех трех контрольных символов: $c_0(2^0) + c_1(2^1) + c_2(2^2) = 1 + 2 + 4 = 7$. Таким образом, двоичный символ, находящийся в кодовом слове C^* на седьмой позиции был принят неверно. Для исправления ошибки достаточно изменить значение этого символа на противоположный. В нашем случае, значение $a_3 = 0$ изменяется на $a_3 = 1$. После исправления ошибки информационное слово I также как и в случае отсутствия ошибок получается из кодового слова C^* путем отбрасывания контрольных разрядов: C = 110~~0~~1~~10~~ → I = 1101

Коды Хемминга, заданные в систематическом виде ($k = 2^i - i - 1$, $n = 2^i - 1$, $i = 3,4,\ldots$, $d=3$)

Систематический (7,4,3)-код Хемминга ($k = 4$, $r = 3$, $n = 7$, $L_{общ} = 2^n = 128$, $L_{разр} = 2^k = 16$, $R = 4/7$, $d=3$)

Производящая матрица G (7,4,3)-кода Хемминга

Информационные символы a_i являются элементами единичной матрицы $k \times k$.

Проверочные символы c_i определяются информационными символами a_i из следующих соотношений:

$$c_0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3;$$
$$c_1 = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3;$$
$$c_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3;$$

$$G = \underbrace{\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & | & c_2 & c_1 & c_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{n} \left.\begin{array}{l} \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{array}\right\} k$$

Информационная комбинация 1101

$$G_{1101} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 1 \\ \times 0 \\ \times 1 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Кодовая комбинация вычисляется путем сложения по mod2 двоичных символов в каждом из столбцов матрицы G_{1101}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Проверочная матрица H (7,4,3)-кода Хемминга формируется из производящей матрицы G

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & | & c_2 & c_1 & c_0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Декодирование осуществляется путем перемножения кодовой комбинации на проверочную матрицу H

$$
H_{1101} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}
$$

И вычислением указателя ошибки (синдрома) путем сложения символов в каждой из строк матрицы H_{1101}

$$
S = \begin{bmatrix} 1\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 0\oplus 0\oplus 0 \\ 1\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 0 \\ 1\oplus 0\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Вычисленный синдром S = 000 указывает на отсутствие ошибок в принятой кодовой комбинации, что позволяет отбросить три младших (проверочных) разряда и восстановить исходную информационную комбинацию 1101.

<u>Декодирование при возникновении однократных и двукратных ошибок</u>

Код с ошибкой первой кратности: 0101010

Декодирование осуществляется путем перемножения кодовой комбинации на проверочную матрицу H

$$
H_{1101*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}
$$

И вычислением указателя ошибки (синдрома) путем сложения символов в каждой из строк матрицы H_{1101*}

$$
S = \begin{bmatrix} 0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 0\oplus 0\oplus 0 \\ 0\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 0 \\ 0\oplus 0\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Вычисленный синдром S = 111 указывает на наличие ошибки и совпадает с первым столбцом проверочной матрицы H, что позволяет сформировать корректирующий вектор 1000000, который складывается по mod2 с принятой кодовой комбинацией. В результате появляется исправленная кодовая комбинация 1101010, которая при отбрасывании младших (проверочных) разрядов позволяет восстановить исходную информационную комбинацию 1101

Код с ошибкой второй кратности: 0101000

Декодирование осуществляется путем перемножения кодовой комбинации на проверочную матрицу H

$$
H_{1101**} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}
$$

И вычислением указателя ошибки (синдрома) путем сложения символов в каждой из строк матрицы H_{1101**}

$$
S = \begin{bmatrix} 0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 0\oplus 0\oplus 0 \\ 0\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 0 \\ 0\oplus 0\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 0\oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Вычисленный синдром S = 101 указывает на наличие ошибки и совпадает со вторым столбцом проверочной матрицы H, что позволяет сформировать корректирующий вектор 0010000, который складывается по mod2 с принятой кодовой комбинацией. В результате появляется кодовая комбинация 0111000, которая при отбрасывании младших (проверочных) разрядов дает комбинацию 0111, не совпадающую с исходной информационной комбинацией, поскольку кодовое расстояние d = 3 кода Хемминга не позволяет исправлять ошибки выше первой кратности.

(8,4,4)-код Хемминга с дополнительной проверкой на четность
($k = 4$, $r = 4$, $n = 8$, $L_{общ} = 2^n = 256$, $L_{разр} = 2^k = 16$, $R = 1/2$, $d=4$)

Формирование 7-разрядной кодовой комбинации аналогично формированию кода Хемминга (7,4,3). Дополнительный, восьмой бит вычисляется путем проверки 7-разрядной кодовой комбинации на четность: "0" добавляется в случае, если количество единиц в комбинации четное, "1" – если количество единиц – нечетное.

Для рассмотренного выше примера, кодовая комбинация 1101010 дополняется битом "0", в результате чего формируется кодовая комбинация 11010100.

Проверочная матрица H (8,4,4)-кода Хемминга

$$H = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Декодирование осуществляется путем перемножения кодовой комбинации на проверочную матрицу H

$$H_{1101} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

И вычислением указателя ошибки (синдрома) путем сложения символов в каждой из строк матрицы H_{1101}

$$S = \begin{bmatrix} 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \\ 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вычисленный синдром S = 0000 указывает на отсутствие ошибок в принятой кодовой комбинации, что позволяет отбросить четыре младших (проверочных) разряда и восстановить исходную информационную комбинацию 1101.

Декодирование при возникновении однократных и двукратных ошибок

Код с ошибкой первой кратности: 01010100

Декодирование осуществляется путем перемножения кодовой комбинации на проверочную матрицу H

$$H_{1101*} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

И вычислением указателя ошибки (синдрома) путем сложения символов в каждой из строк матрицы H_{1101*}

$$S = \begin{bmatrix} 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вычисленный синдром S = 1111 указывает на наличие ошибки и совпадает с первым столбцом проверочной матрицы H, что позволяет сформировать корректирующий вектор 10000000, который складывается по mod2 с принятой кодовой комбинацией. В результате появляется исправленная кодовая комбинация 11010100, которая при отбрасывании младших (проверочных) разрядов позволяет восстановить исходную информационную комбинацию 1101

Код с ошибкой второй кратности: 01010000

Декодирование осуществляется путем перемножения кодовой комбинации на проверочную матрицу H

$$H_{1101**} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

И вычислением указателя ошибки (синдрома) путем сложения символов в каждой из строк матрицы H_{1101**}

$$S = \begin{bmatrix} 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вычисленный синдром S = 1010 указывает на наличие двукратной ошибки, поскольку первые три символа синдрома указывают на наличие ошибки, а последний символ – на наличие ошибки четной кратности, что позволяет сделать вывод о наличии неисправляемой ошибки.