Этап №3 Методы решения ЗЛП

Дано: $f(X) = -4X_1 + X_2 \to extr$

$X_1 + 2X_2 \leq 6$

$2X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$

Решение: а) Решить задачу графически.

Для графического решения задачи построим:

•) Множество допустимых решений, задаваемое ограничениями

•) Градиент функции $\nabla f(X) = (-4, 1)^T$ в точке с координатами $(0,0)$

•) Линию уровня функции $f(X) = C$, проходящую через точку с координатами $(0,0)$

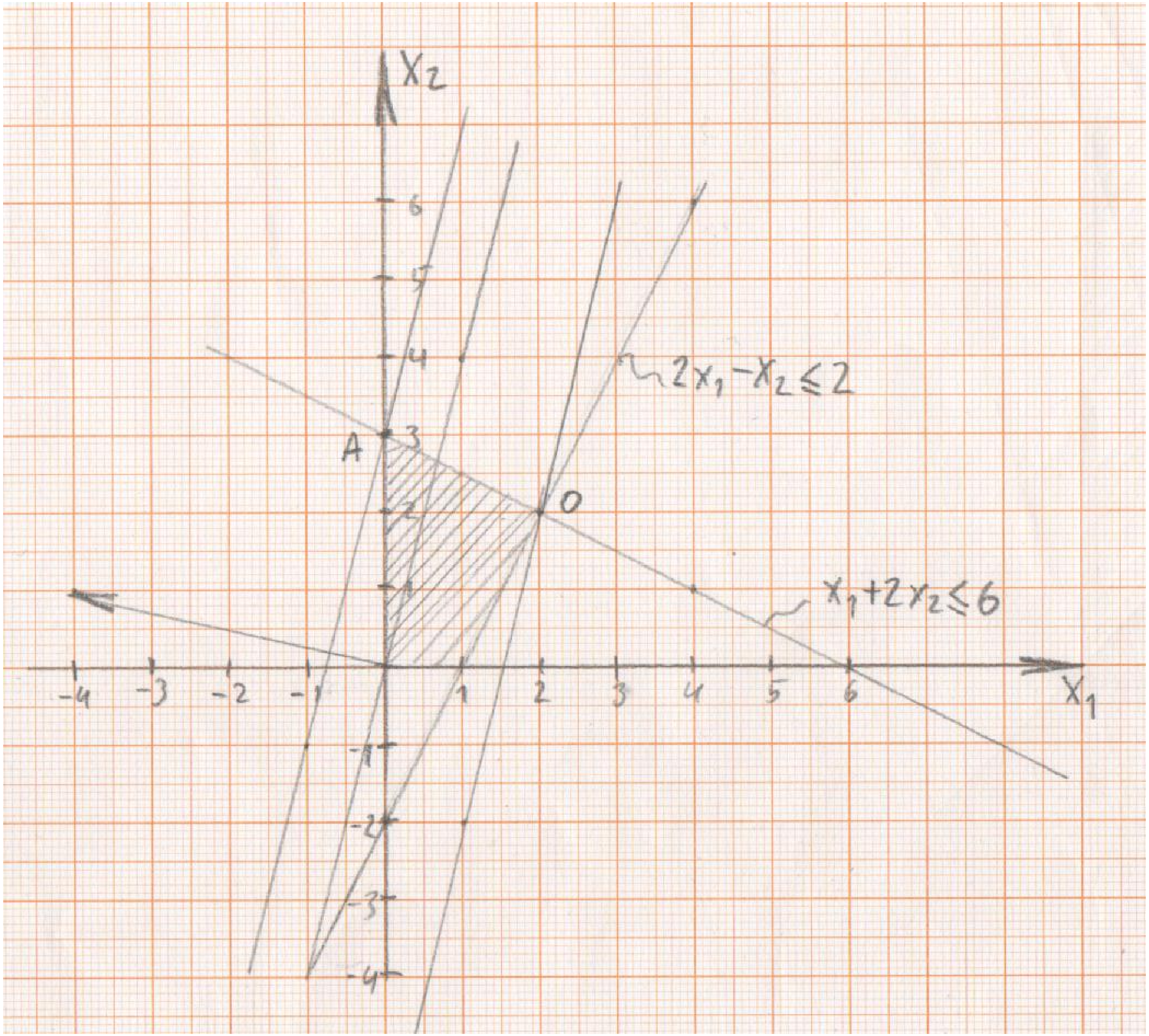
Для этого найдём значение константы $C = f(0,0) = 0+0=0$, а затем построим прямую $-4x_1 + x_2 = 0$

Будем искать точку максимума функции как последнюю точку касания линии уровня функции и множества допустимых решений в направлении градиента функции. Как видно из чертежа, это точка $A:(0,3)$. Таким образом, получено решение задачи поиска максимума функции:

$X_1^* = 0 \quad x_2^* = 3 \quad f(X^*_{max}) = 3$

Будем искать точку минимума функции как первую точку касания линии уровня функции и множества допустимых решений в направлении градиента функции. Как видно из чертежа, это точка $O:(2,2)$. Таким образом, получено решение задачи поиска минимума функции:

$X_1^* = 2 \quad X_2^* = 2 \quad f(X^*_{min}) = -6$



X2
X1
A
O
2x1-x2≤2
x1+2x2≤6
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

б) Решить задачу симплекс-методом

Найдем максимум функции

Будем рассматривать задачу

$$f(X) = -4x_1 + x_2 \to max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Подготовим задачу к решению симплекс-методом

Перейдём от задачи в основной постановке к задаче в канонической

$$f(X) = -4x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to max$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

x_3, x_4 – доп. переменные в задаче

Выпишем столбцы при переменных в ограничениях

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	1	0
2	-1	0	1

Базис в задаче есть, т.к. среди выписанных столбцов есть 2 базисных

Окончательно получаем задачу, подготовленную к решению симплекс-методом

$$f(X) = -4x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to max$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Базисные переменные в задаче: в 1-ом огран. – x_3

во 2-ом – x_4

Начальное базисное решение

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 6 \quad x_4 = 2$

В исходных переменных x_1, x_2 это решение соответствует точке с координатами $(0,0)$

Таблица №1

			-4	1	0	0	c_j
c_i	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
0	x_3	6	1	2	1	0	3
0	x_4	2	2	-1	0	1	-2
		Δ	-4	1	0	0	

Базисное решение соотв. таблице №1:

$x_3 = 6 \quad x_1 = 0$

$x_4 = 2 \quad x_2 = 0$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных

$\Delta_1 = -4 - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -4 \quad \Delta_2 = 1 - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 1$

Т.К. Δ_2 является максимальной положительной величиной в строке симплекс-разностей, то в базис вводится переменная x_2. Соотв. этой переменной столбец – Z-столбец

Вычислим величины r_i как отношение элементов столбца Бр к элементам Z-столбца.

$r_1 = \frac{6}{2} = 3 \qquad r_2 = \frac{2}{-1} = -2$

Из базиса выводится переменная x_3, т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_i, соотв. ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки находится разрешающий элемент $R = 2$

Осуществим пересчёт таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхн. строку новой таблицы №2
- запишем в новую таблицу №2 новые базисные переменные x_2, x_4
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №2
- Пересчитаем Z-строку: разделим Z строку на разрешающий элемент, результат запишем в 1 строку таблицы №2 - получится разрешающая строка.

$$\frac{6 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \qquad /2}{3 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0}$$

Пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчёта - 2-й элемент 2-столбца - это -1 и вычтем из второй строки таблицы №1, результат запишем во 2ую строку таблицы №2

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ - & 3 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 5 & 2.5 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Таблица №2

			-4	1	0	0	C_j
C_i	$Б_п$	$Б_р$	X_1	X_2	X_3	X_4	V_i
1	X_2	3	1/2	1	1/2	0	
0	X_4	5	2,5	0	1/2	1	
		Δ	-4,5	0	-1/2	0	

Базисное решение, соответствующее таблице №2

$X_2 = 3$ $X_1 = 0$

$X_4 = 5$ $X_3 = 0$

В исходных переменных это решение соответствует точке с координатами (0,3)

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$\Delta_1 = -4 - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\2,5\end{pmatrix} = -4,5$ $\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$

Т.к. все симплекс-разности в таблице №2 неположительны, то точка (0,3) является решением

Точка (0,3) - максимум.

<u>Найдём минимум функции</u>. Будем рассматривать задачу

$f(X) = -4x_1 + x_2 \to min$

$x_1 + 2x_2 \le 6$

$2x_1 - x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

Перейдём к задаче поиска максимума

$f(X) = 4x_1 - x_2 \to max$

$x_1 + 2x_2 \le 6$

$2x_1 - x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

Воспользовавшись результатом подготовки задачи для поиска max исходной функции, получим:

$f(X) = 4x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to max$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 6$

$2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Базисные переменные в задаче: в 1 огр. – X_3

во 2 огр. – X_4

Начальное базисное решение: $X_3 = 6$ $X_4 = 2$

В исходных переменных это решение соотв. точке (0,0)

Таблица №1

c_i	Бп	Бр	X_1	X_2	X_3	X_4	r_i
			4	-1	0	0	c_j
0	X_3	6	1	2	1	0	6
0	X_4	2	2	-1	0	1	1
		Δ	4	-1	0	0	

Базисное решение, соотв. таблице №1

$X_3 = 6$ $X_1 = 0$

$X_4 = 2$ $X_2 = 0$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 4 - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \Delta_2 = -1 - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = -1$$

Т.к. Δ_1 является максимальной положительной величиной в строке симплекс-разностей, то в базис вводится переменная x_1, соотв. этой переменной столбец – z-столбец

Вычислим величины r_i:

$$r_1 = \frac{6}{1} = 6 \qquad r_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Из базиса выводится переменная x_4, т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_1, соотв. ей строка – z строка.

Разрешающий элемент $R = 2$

Осуществим пересчёт таблицы

$$\frac{2 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1}{1 \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}} \Big/ 2 \qquad -\frac{\begin{matrix}6 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{matrix}}{\begin{matrix}5 & 0 & 2.5 & 1 & -\frac{1}{2}\end{matrix}}$$

Таблица №2

c_i	Бп	Бр	X_1	X_2	X_3	X_4	r_i
			4	-1	0	0	c_j
0	X_3	5	0	2.5	0	-1/2	2
4	X_1	1	1	-1/2	0	1/2	-2
		Δ	0	1	0	-2	

Базисное решение соотв. таблице №2

$X_1 = 1$ $X_2 = 0$

$X_3 = 5$ $X_4 = 0$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных

$$\Delta_2 = -1 - \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2{,}5\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = 1 \qquad \Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -2$$

Т.к. Δ_2 явл. макс. полож. величиной в строке симплекс-разн., то в базис вводится переменная X_2, соотв. этой переменной столбец – z-столбец.

Вычислим величины r_i

$r_1 = \frac{5}{2,5} = 2 \quad r_2 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

Из базиса выводится переменная X_3, т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина r_1, соотв. ей стрoка – Z-строка.

Разрешающий элемент $R = 2,5$

Осуществим пересчёт таблицы:

$$\frac{5 \quad 0 \quad 2,5 \quad 0 \quad -\frac{1}{2}}{2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{1}{5}} \; /2,5$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0,1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0,4 \end{array}$$

Таблица №3

		c_j	4	-1	0	0	
c_i	Бп	Бр	X_1	X_2	X_3	X_4	r_i
-1	X_2	2	0	1	0	-0,2	
4	X_1	2	1	0	0	0,4	
		Δ	0	0	0	-1,8	

Базисное решение соотв. таблице №3

$X_1 = 2 \quad X_3 = 0$

$X_2 = 2 \quad X_4 = 0$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных

$\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad \Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0,2\\0,4\end{pmatrix} = -1,8$

Т.к. все симплекс-разности в таблице №3 неположительные, то решение найдено

$X_1^* = 2 \quad X_3^* = 0$

$X_2^* = 2 \quad X_4^* = 0$

Решение соответствует точке (2, 2).

Точка (2,2) – минимум