Этап №2 Методы решения ЗНП при ограничениях типа равенства

Дано: $f(X) = 0{,}5x_2^2 - x_1 + 2x_2 \to extr$

при ограничении: $-2x_1 + x_2 = 4$

Решение: а) Решить задачу графически

Решение задачи есть точка касания ограничения и линии уровня функции C, где $C = const$.

Искомая точка касания обладает следующими свойствами:

- Точка касания принадлежит ограничению $-2x_1^{кас} + x_2^{кас} = 4$
- В точке касания градиенты функции и ограничения линейно зависимы:

$$\nabla f(X^{кас}) = \lambda \cdot \nabla \varphi_1(X^{кас}) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ x_2+2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{x_2+2}{1}$$

Воспользовавшись условиями касания сост. систему уравнений и найдём координаты решения

$$\begin{cases} x_2 + 2 = \frac{1}{2} \\ -2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2{,}75 \\ x_2^* = -1{,}5 \end{cases}$$

Найдено решение задачи - точка $X^* = (-2{,}75, -1{,}5)$ - точка касания ограничения и линии уровня функции

$f = 0{,}5(-1{,}5)^2 + 2{,}75 + 2 \cdot (-1{,}5) = 0{,}875$

Построим графическую иллюстрацию решения

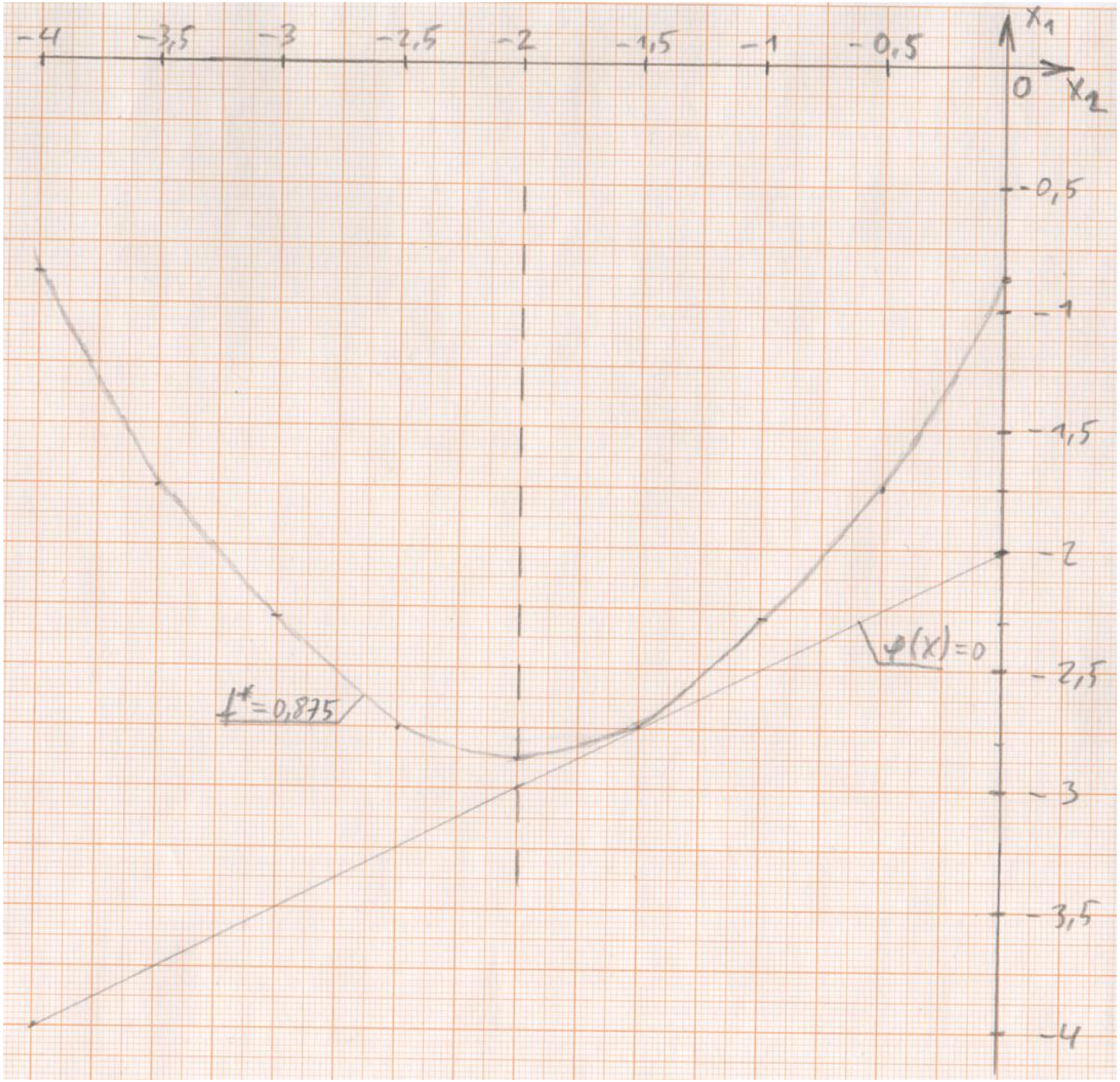
Ограничение в задаче - прямая с уравнением $x_1 = \frac{x_2}{2} - 2$

Определим конфигурацию линии уровня $f = 0{,}875$, вычислив инвариант

$$D = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Искомая линия уровня - парабола}$$

Уравнение линии уровня:

$x_1 = 0{,}5x_2^2 + 2x_2 - 0{,}875$



x_1
x_2
0
−4
−3,5
−3
−2,5
−2
−1,5
−1
−0,5
−0,5
−1
−1,5
−2
−2,5
−3
−3,5
−4
$f^* = 0,875$
$\varphi(x) = 0$

б) Аналитически отыскать экстремум функции при ограничении типа равенства, используя аппарат необходимых и достаточных условий (методом множителей Лагранжа)

Запишем классическую фу-ю Лагранжа:

$L(X,\lambda) = 0{,}5x_2^2 - x_1 + 2x_2 + \lambda_1(-2x_1 + x_2 - 4)$

Запишем необходимые условия экстремума фу-и при ограничениях типа равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_1} = -2\lambda_1 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_2} = \lambda_1 + x_2 + 2 = 0 \\ \varphi_1(X) = -2x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - 1 = 0 \\ \lambda_1 + x_2 + 2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^* = -\frac{1}{2} \\ x_1^* = -2{,}75 \\ x_2^* = -1{,}5 \end{cases}$$

Точка с координатами $(X^*, \lambda^*) = (-2{,}75, -1{,}5, -0{,}5)$ – условно-стационарная точка фу-и

Определим характер полученной точки с помощью достаточных условий экстремума:

Запишем второй дифференциал фу-и Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_1^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial x_2^2} = 1$$

$d^2L(X,\lambda) = 1\cdot(dx_2)^2$

Запишем дифференциал ограничения φ_1:

$$\frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} = -2 \qquad \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} = 1 \qquad d\varphi_1(X) = -2dx_1 + dx_2$$

В точке $X^* = (-2{,}75, -1{,}5, -0{,}5)$ имеем:

$d^2L(X^*,\lambda) = (dx_2)^2$ при условии $d\varphi_1(X^*) = -2dx_1 + dx_2 = 0$

получим:

$dx_2 = 2dx_1 \Rightarrow d^2L(X^*) = (2dx_1)^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$

Следовательно, в точке $X^* = (-2{,}75, -1{,}5)$ выполнены достаточные условия локального условного минимума.