Московский авиационный институт
(технический университет)

Расчётно-графическая работа по курсу

"Теория оптимизации и численные методы"

Выполнил: студент г. 14-302
Константинов К.В.

Москва, 2009

Этап №1 Методы безусловной минимизации функции многих переменных

Дано: $f(X) = y^2 + 3z^2 - y + 6z + 10 \to extr$

Решение:

а) Аналитически отыскать экстремум функции двух переменных (с использованием аппарата необходимых и достаточных условий экстремума)

Запишем градиент функции:

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2y - 1 \\ 6z + 6 \end{pmatrix}$$

Запишем необходимые условия экстремума и вычислим координаты стационарных точек

$$\begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ 6z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 1 \\ 6z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

Получена стационарная точка функции: $X^* = (\frac{1}{2}; -1)$

Составим матрицу Гессе:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6 \quad \Rightarrow H(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицу Гессе в полученной стационарной точке:

$$H(X^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Определим характер полученной стационарной точка используя критерий Сильвестра

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 2 \cdot 6 - 0 \cdot 0 = 12 > 0$

Т.к. все диагональные миноры матрицы положительны, матрица Гессе является положительно-определённой, и, следовательно, точка $X^* = (\frac{1}{2}, -1)$ является точкой локального минимума функции.

б) Сделать три итерации методом градиентного спуска из начальной точки $X^0=(0,0)$ в направление экстремума

итерация 0

$X^0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad f(X^0)=0^2+3\cdot0^2-0+6\cdot0+10=10$

$\nabla f(X^0)=\begin{pmatrix}2\cdot0-1\\6\cdot0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ $\quad \|\nabla f(X^0)\|=\sqrt{(-1)^2+6^2}=\sqrt{37}\approx6{,}08276$

Итерация 1

Вычислим точку $X^1=X^0-t_0\nabla f(X^0)$. Зададим шаг $t_0=0{,}1$

$X^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-0{,}1\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}6\end{pmatrix}$

$f(X^1)=0{,}1^2+3\cdot(-0{,}6)^2-0{,}1+6\cdot(-0{,}6)+10=7{,}39$

$f(X^1)<f(X^0)\Rightarrow$ шаг выбран верно

$\nabla f(X^1)=\begin{pmatrix}2\cdot0{,}1-1\\6\cdot(-0{,}6)+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}8\\2{,}4\end{pmatrix}$ $\quad \|\nabla f(X^1)\|=\sqrt{92{,}16+0{,}64}=2{,}52982$

Итерация 2

$X^2=\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}6\end{pmatrix}-0{,}1\begin{pmatrix}-0{,}8\\2{,}4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}18\\-0{,}84\end{pmatrix}$

$f(X^2)=0{,}18^2+3(-0{,}84)^2-0{,}18+6\cdot(-0{,}84)+10=6{,}9292$

$f(X^2)<f(X^1)\Rightarrow$ шаг выбран верно

$\nabla f(X^2)=\begin{pmatrix}2\cdot0{,}18-1\\6\cdot(-0{,}84)+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}64\\0{,}96\end{pmatrix}$ $\quad \|\nabla f(X^2)\|=\sqrt{(-0{,}64)^2+0{,}96^2}=1{,}15377$

Итерация 3

$X^3=\begin{pmatrix}0{,}18\\-0{,}84\end{pmatrix}-0{,}1\begin{pmatrix}-0{,}64\\0{,}96\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}244\\-0{,}936\end{pmatrix}$

$f(X^3)=(0{,}244)^2+3\cdot(-0{,}936)^2-0{,}244+6\cdot(-0{,}936)+10=6{,}82782$

$f(X^3)<f(X^2)\Rightarrow$ шаг выбран верно

$\nabla f(X^3)=\begin{pmatrix}2\cdot0{,}244-1\\6\cdot(-0{,}936)+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}512\\0{,}384\end{pmatrix}$ $\quad \|\nabla f(X^3)\|=\sqrt{0{,}512^2+0{,}384^2}=0{,}64$

N	y	z	t	∇_y	∇_z	f	$\|\nabla f(x)\|$
0	0	0	—	−1	6	10	6,08276
1	0,1	−0,6	0,1	−0,8	2,4	7,39	2,52982
2	0,18	−0,84	0,1	−0,64	0,96	6,9292	1,15377
3	0,244	−0,936	0,1	−0,512	0,384	6,82782	0,64

б) Сделать одну итерацию методом наискорейшего спуска из начальной точки $X^0=(0,0)$ в направление экстремума

<u>Итерация 0</u> Итерация 0 совпадает с 0-й итерацией методом градиентного спуска

<u>Итерация 1</u>

Вычислим точку X^1 по формуле. $X^1 = X^0 - t_0 \nabla f(X^0)$

$$X^1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - t_0\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_0\\-6t_0\end{pmatrix}$$

Вычислим шаг t_0:

$$f(X^1) = t_0^2+3(-6t_0)^2 - t_0 + 6(-6t_0)+10 = 109\cdot t_0^2 - 37t_0+10$$

$$\frac{df(X^1)}{dt_0} = 218t_0 - 37 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{37}{218} = 0,16972$$

$$X^1 = \begin{pmatrix}-1\cdot(-0,16972)\\ 6\cdot(-0,16972)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,16972\\-1,01832\end{pmatrix}$$

$$f(X^1) = 109\cdot(0,16972)^2 - 37\cdot 0,16972+10 = 6,86009$$

$$\nabla f(X^1) = \begin{pmatrix}2\cdot0,16972-1\\6\cdot(-1,01832)+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,66056\\-0,10992\end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^1)\| = \sqrt{(-0,66056)^2+(-0,10992)^2} = 0,66964$$

N	y	z	t	∇y	∇z	f	$\|\nabla f\|$
0	0	0	–	−1	6	10	6,08276
1	0,16972	−1,01832	0,16972	−0,66056	−0,10992	6,86009	0,66964

2) Сделать две итерации методом сопряженных градиентов из начальной точки $X^0=(0,0)$ в направление экстремума

<u>Итерация 0</u> Итерация 0 совпадает с 0-й итерацией методом градиентного спуска

<u>Итерация 1</u> Итерация 1 совпадает с 1-ой итерацией методом наискорейшего спуска

<u>Итерация 2</u> Вычислим точку X^2 по формулам:

$$X^2 = X^1 + t_1 d^1$$

$$d_1 = -\nabla f(X^1) + \beta_0 d^0, \quad d^0 = -\nabla f(X^0), \quad \beta_0 = \frac{\|\nabla f(X^1)\|^2}{\|\nabla f(X^0)\|^2}$$

$$\beta_0 = \frac{(0,66964)^2}{(2,64575)^2} = 0,06405$$

$$d_1 = -\begin{pmatrix}-0,66056\\-0,10992\end{pmatrix} + 0,06405\begin{pmatrix}+1\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,72461\\0,32561\end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix}0,16972\\-1,01832\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}0,72461\\0,32561\end{pmatrix}$$

$$f(X^2) = 1,22905t_1 + 3(0,32561t_1 - 1,01832)^2 + (0,72461t_1 + 0,16472)^2 + 3,72036$$

$$\frac{df(x^2)}{dt_1} = 1,68625 \cdot t_1 - 0,51443 = 0 \quad t_1 = \frac{0,51443}{1,68625} = 0,30507$$

$$X^2 = \begin{pmatrix}0,39077\\-0,91898\end{pmatrix} \quad \nabla f(X^2) = \begin{pmatrix}2\cdot 0,39077 - 1\\6\cdot(-0,91898) + 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,21844\\0,48608\end{pmatrix}$$

$$\|\nabla f(X^2)\| = \sqrt{(0,21844)^2 + (0,48608)^2} = 0,53291 \quad f(X^2) = 6,78162$$

N	y	z	t	∇_y	∇_z	f	$\|\nabla f\|$
0	0	0	—	−1	6	10	6,08276
1	0,16972	−1,01832	0,16472	−0,66056	−0,10992	6,86009	0,66964
2	0,39077	−0,91898	0,30507	−0,21844	0,48608	6,78162	0,53291

д) Сделать одну итерацию методом Ньютона из начальной точки $X^0=(0,0)$ в направление экстремума

<u>Итерация 0</u> Итерация 0 совпадает с 0-й итерацией метода градиентного спуска

<u>Итерация 1</u> Вычислим точку X^1 по формуле:

$$X^1 = X^0 - H^{-1}(X^0)\nabla f(X^0)$$

$$H(X^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1}(X^0) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} + 0 \\ 0 + \frac{6}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{6}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f(X^1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3\cdot(-3)^2 - \frac{1}{6} + 6(-3) + 10 = 18{,}86111$$

$$\nabla f(X^1) = \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{1}{6} - 1 \\ 6\cdot(-3)+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \|\nabla f(X^1)\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + (-12)^2} = 12{,}018504$$

N	y	z	∇_y	∇_z	f	$\|\nabla f\|$
0	0	0	−1	6	10	6,08276
1	$\frac{1}{6}$	−3	$-\frac{2}{3}$	−12	18,86111	12,018504