Столяров С.А. гр. 14-302
Курсовая работа часть II
Анализ периодических сигналов

1. Выберем численное значение периода сигнала. Запишем аналитическое выражение периодического сигнала и построим его график.

Одиночный импульс, из которого состоит периодический сигнал:

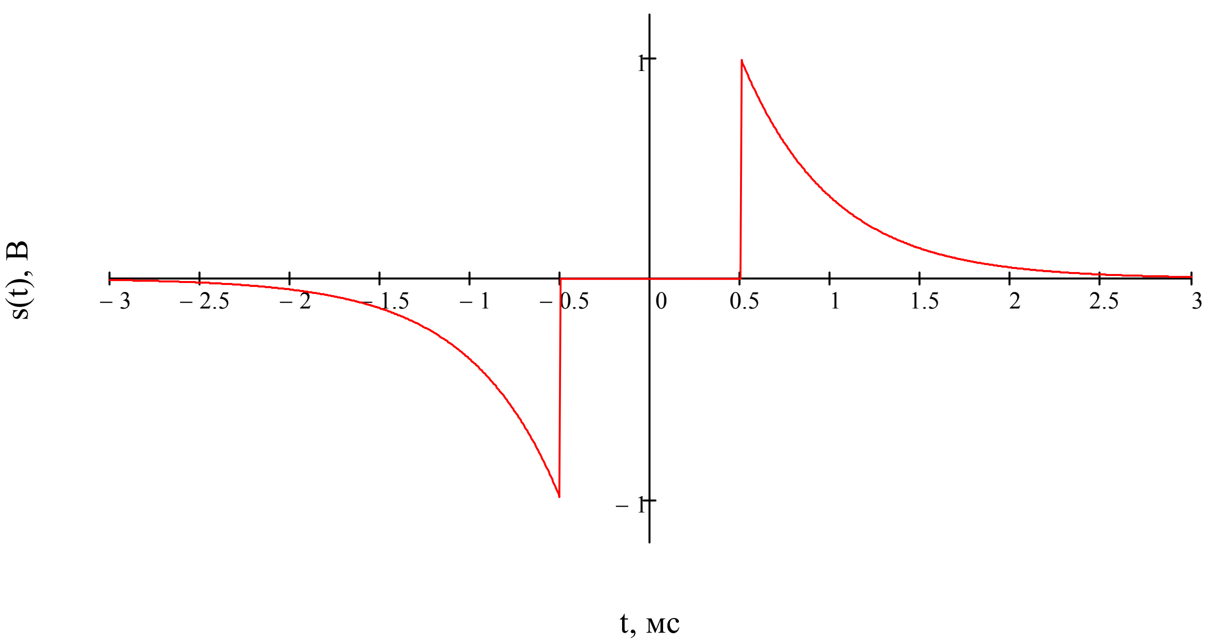
Амплитуда импульса $A := 1$ В

Запаздывание импульса $\Delta := \frac{1}{2}$ мс

Постоянная времени импульса $\alpha := \frac{1}{\Delta}$ КГц

$$s(t) := \begin{cases} -A \cdot e^{\alpha \cdot (t+\Delta)} & \text{if } t \le \Delta \\ A \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\Delta)} & \text{if } t \ge \Delta \\ 0 \quad \text{if } |t| < \Delta \end{cases}$$

Одиночный импульс

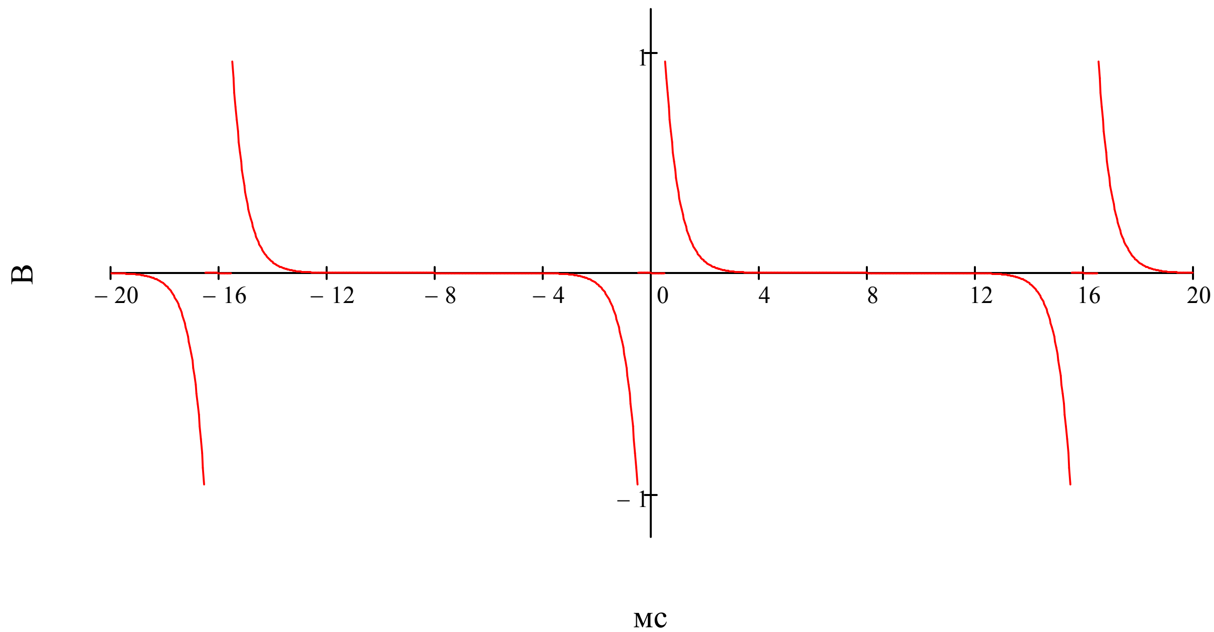


Пусть период сигнала будет в 4 раза больше, чем физическая длительность одиночного импульса. Так как одиночный импульс состоит из двух экспонент, сдвинутых относительно оси ОУ на -Δ и +Δ влево и вправо соответственно, а физическая длительность экспоненты равна 3Δ, то его длительность равна 8Δ

$T := 4 \cdot (8 \cdot \Delta) = 16$ мс

$$s_T(t) := \sum_{m=-10}^{10} s(t - m \cdot T)$$

Периодический сигнал

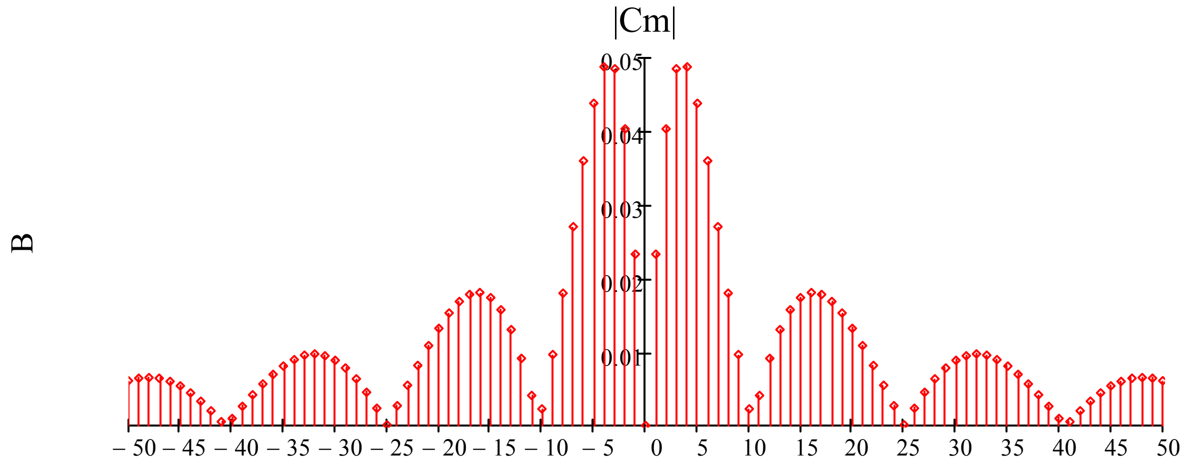


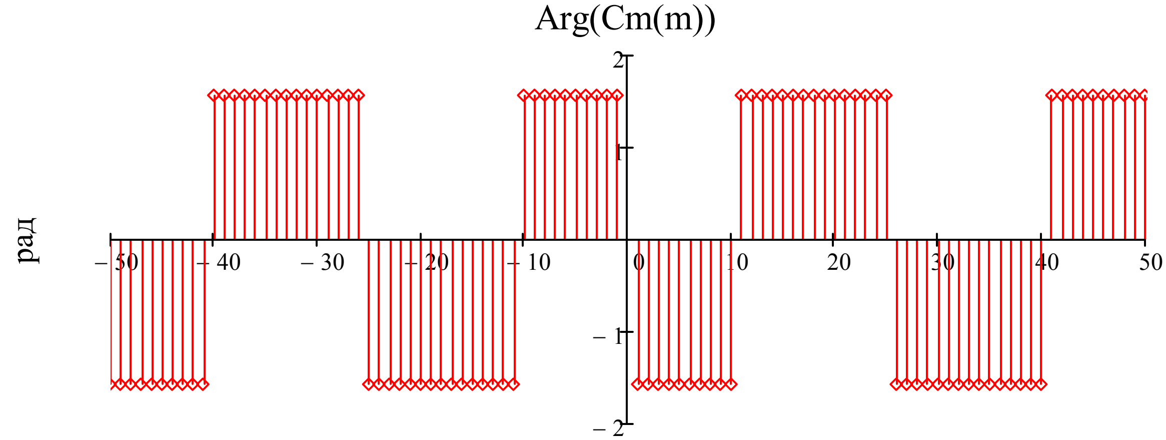
2. Спектр периодического сигнала.

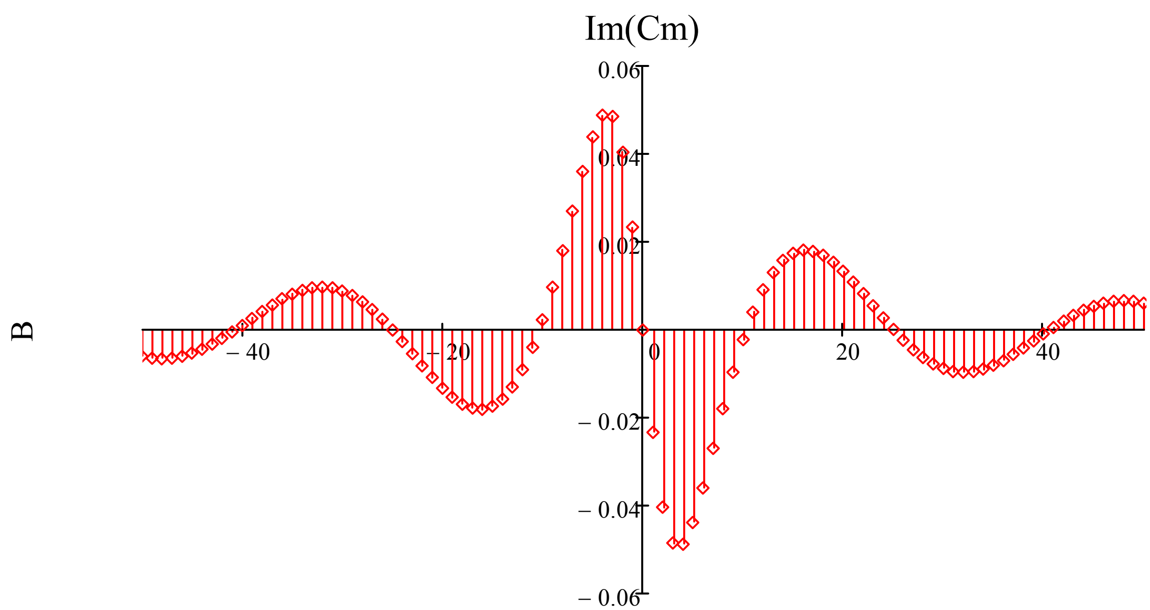
Комплексная форма:

$$C_m(m) := \frac{1}{T}\left[\frac{-2A \cdot \left(\alpha \sin\left(2\pi \frac{m}{T} \cdot \Delta\right) + 2\pi \frac{m}{T} \cdot \cos\left(2\pi \frac{m}{T} \cdot \Delta\right)\right) \cdot i}{\alpha^2 + \left(2\pi \frac{m}{T}\right)^2}\right]$$

$m := -1000 .. 1000$


|Cm|
В

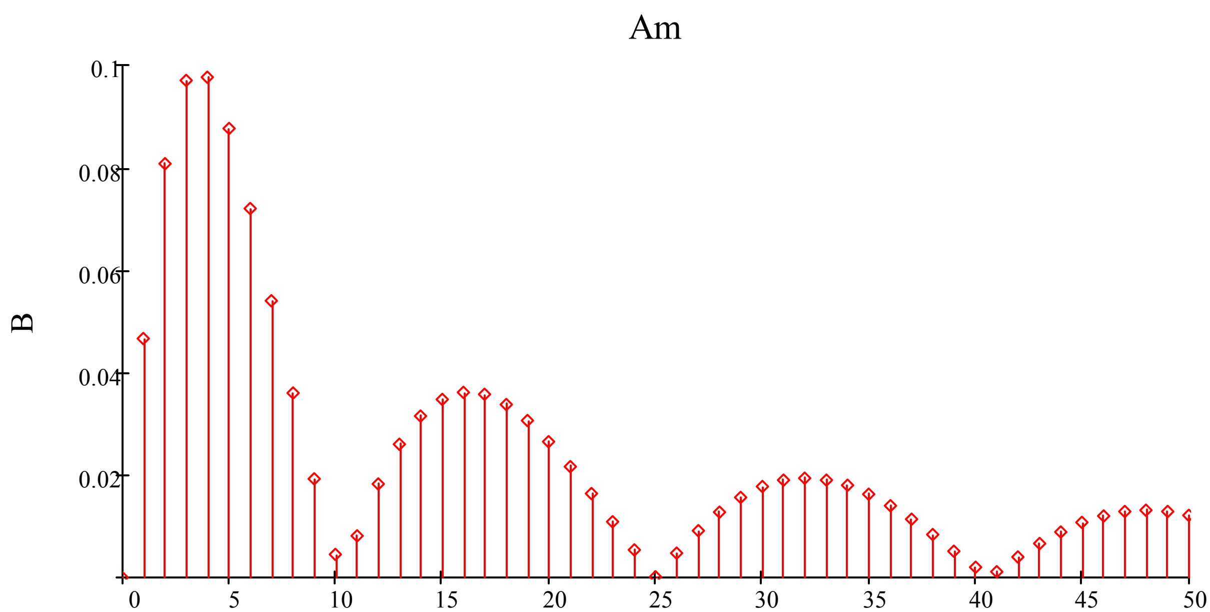

Arg(Cm(m))
рад

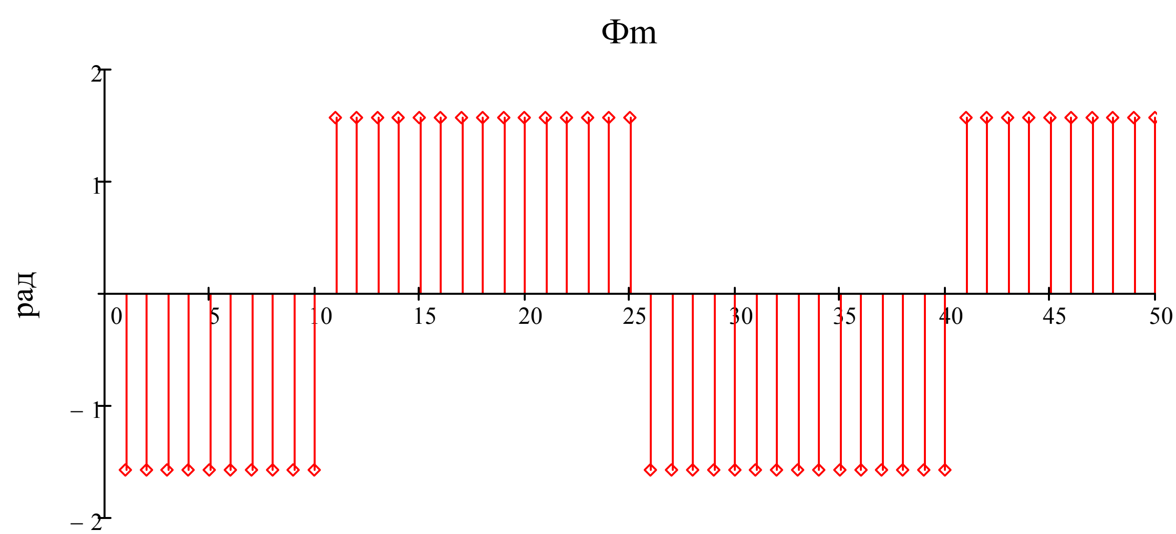

Im(Cm)
В

Амплитудно-фазовая форма:

$$A_m(m) := \begin{cases} 2\left|C_m(m)\right| & \text{if } m > 0 \\ 0 & \text{if } m < 0 \\ \left|C_m(m)\right| & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi_m(m) := \begin{cases} \arg\left(C_m(m)\right) & \text{if } m \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

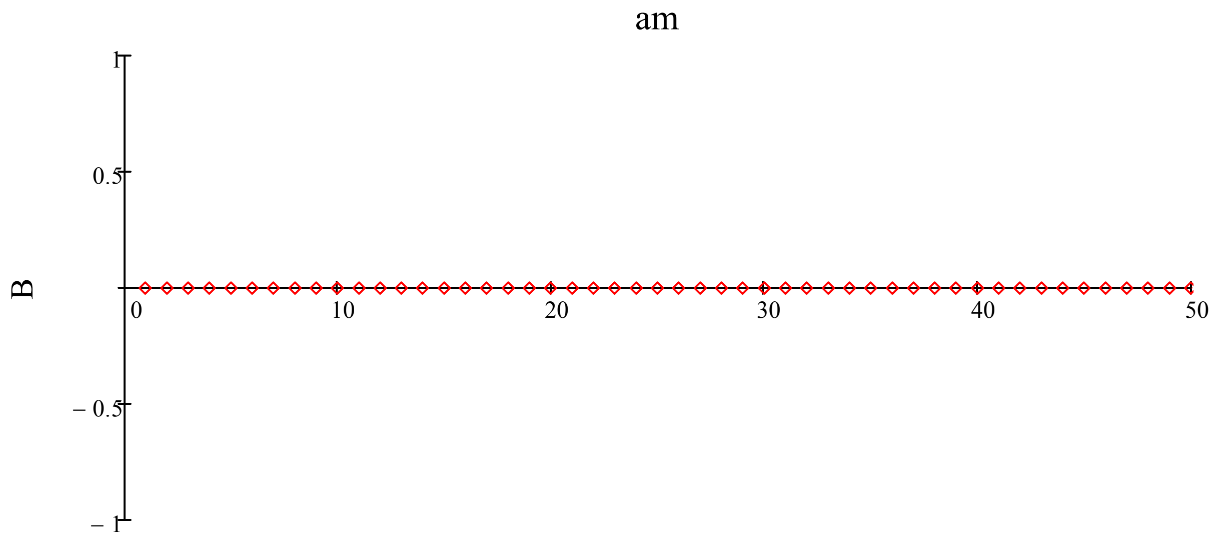


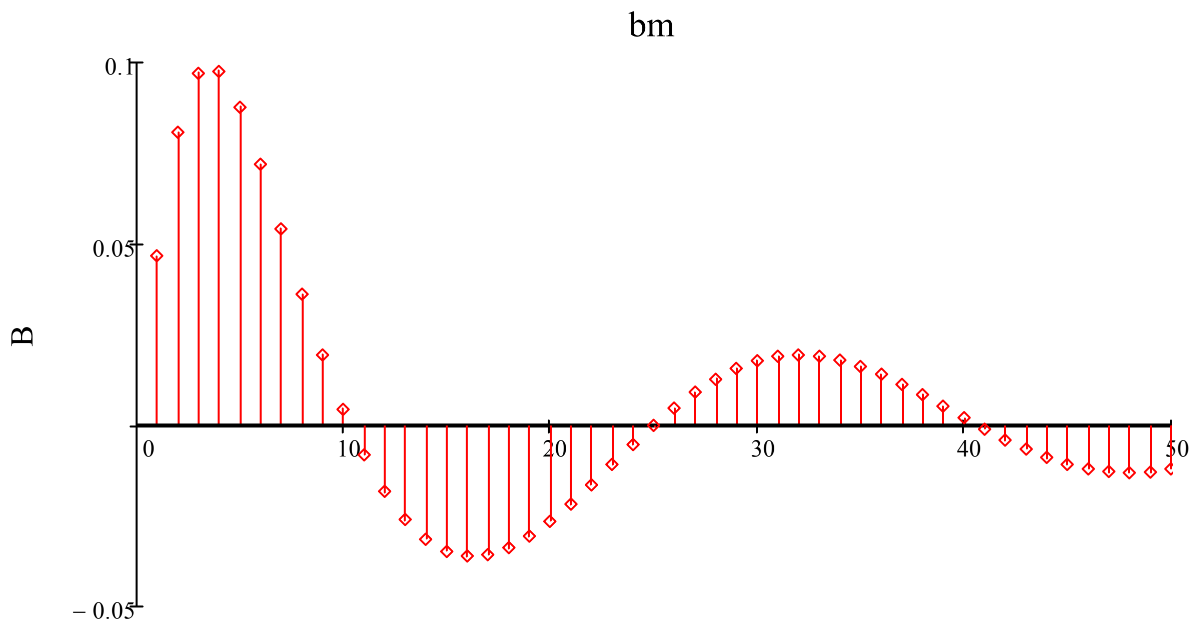


Квадратурная форма:

$$a_m(m) := A_m(m)\cos(\phi_m(m))$$

$$b_m(m) := -A_m(m)\sin(\phi_m(m))$$

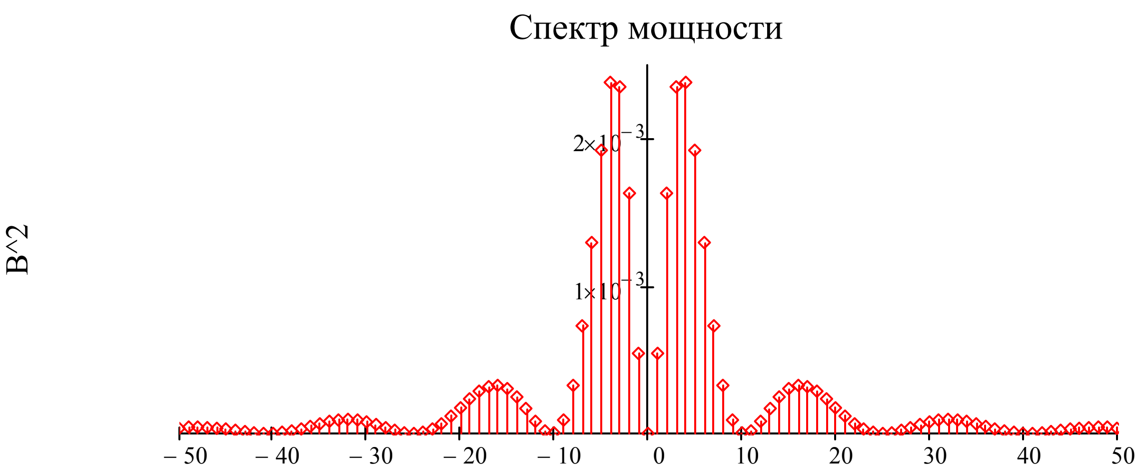




3. Спектр мощности периодического сигнала

$$pm(m) := \left(\left|C_m(m)\right|\right)^2$$

$$p_m(m) := \left[\left|\frac{1}{T}\left[\frac{-2A\cdot\left(\alpha\sin\left(2\pi\frac{m}{T}\cdot\Delta\right)+2\pi\frac{m}{T}\cdot\cos\left(2\pi\frac{m}{T}\cdot\Delta\right)\right)\cdot i}{\alpha^2+\left(2\pi\frac{m}{T}\right)^2}\right]\right|\right]^2$$



4. Средняя мощность периодического сигнала.

Определим среднюю мощность по сигналу:

$$Pcp := \frac{1}{T}\cdot\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\left|s_T(t)\right|\right)^2 dt = 0.031\ B^2$$

Определим среднюю мощность по спектру мощности:

$$P_{cp} := \sum_{m=-1000}^{1000} p_m(m) = 0.031 \qquad B^2$$

5. АКФ периодического сигнала

АКФ одиночного импульсы

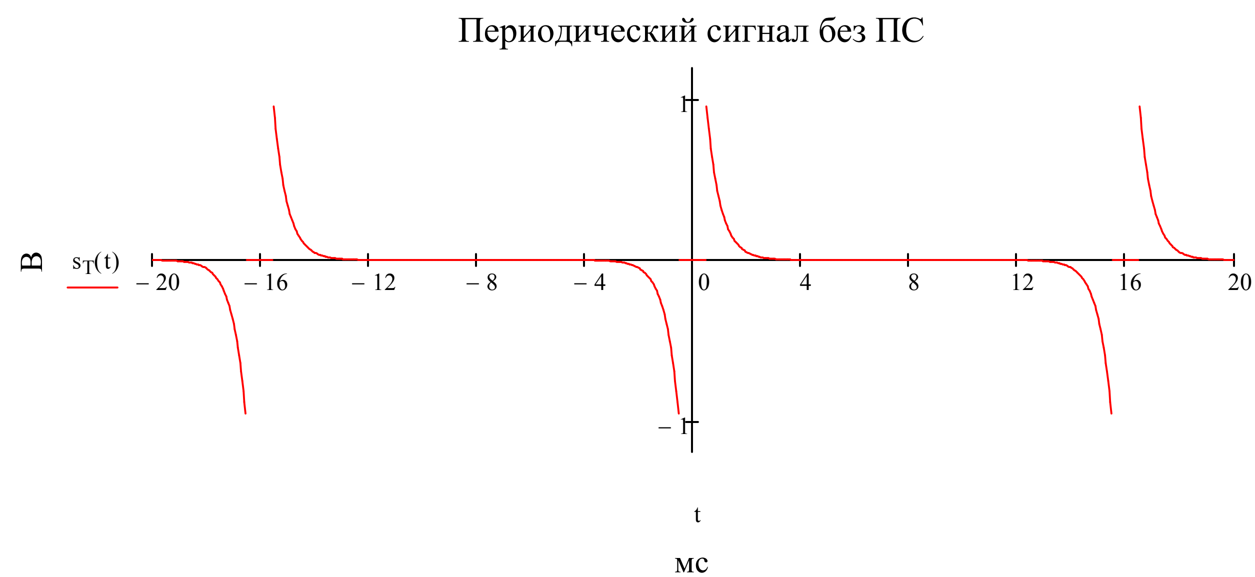
$$R_T(\tau) := \frac{1}{T}\cdot\sum_{n=-1000}^{1000} R(\tau - n\cdot T) \quad ,где \qquad R(\tau) := \begin{cases} \dfrac{A^2}{\alpha}\cdot e^{-\alpha\cdot|\tau|} & \text{if } 0 \le |\tau| \le 2\Delta \\ \dfrac{A\,e^{-\alpha\cdot|\tau|}}{\alpha} - e^{-\alpha\cdot(|\tau|-2\Delta)}\cdot(|\tau| - 2\Delta) & \text{if } |\tau| > 2\Delta \end{cases}$$

$R_T(0) = 0.031$ $\quad B^2$

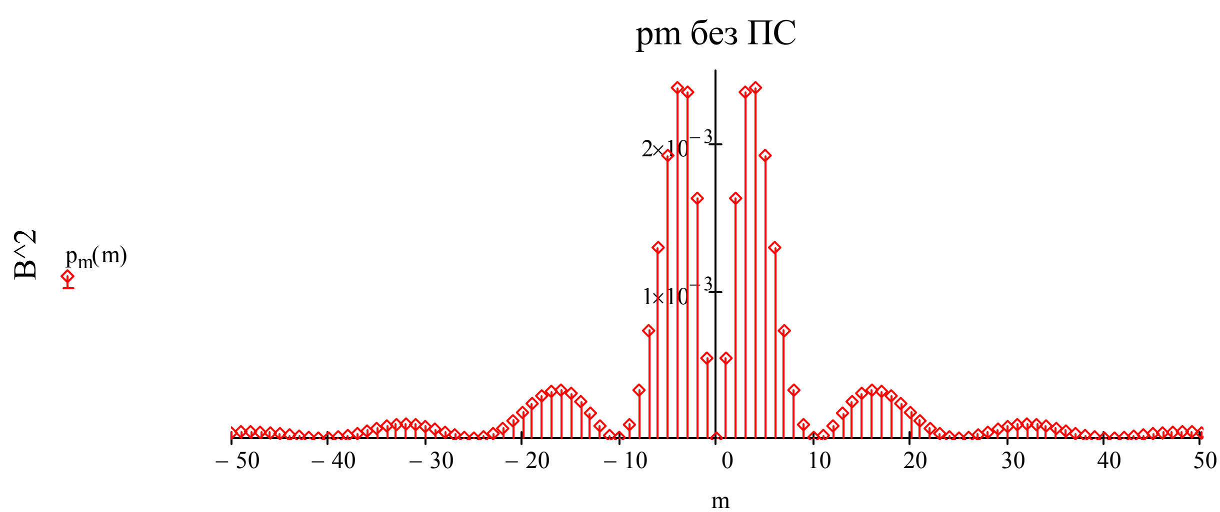
$$R_{Tч}(\tau) := \frac{1}{T}\cdot\int_0^T s_T(t)\cdot s_T(t-\tau)\,dt$$

6. Исключение периодической составляющей.

$$s_T(t) := s_T(t) - C_m(0)$$



$$p_m(m) := \left(\left|C_m(m)\right|\right)^2 - C_m(0)$$

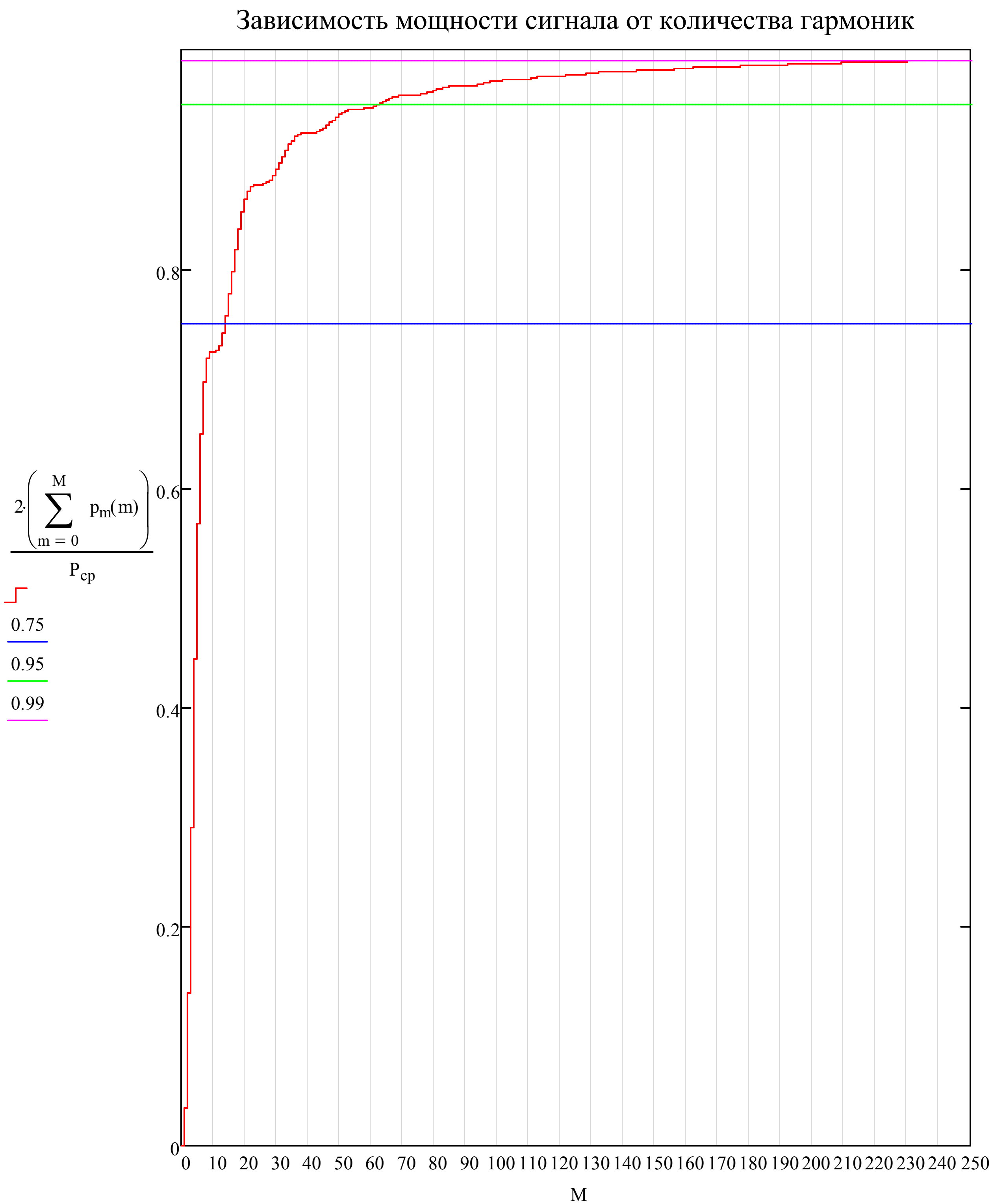


$$P_{cp} := \frac{1}{T}\cdot\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\left|s_T(t)\right|\right)^2 dt = 0.031 \quad B^2$$

$$P_{cp} := \sum_{m=-1000}^{1000} p_m(m) = 0.031 \qquad B^2$$

7. Определим количество гармоник, которые составляют не менее 75, 95 и 99% мощности сигнала.

$M := 0..300$



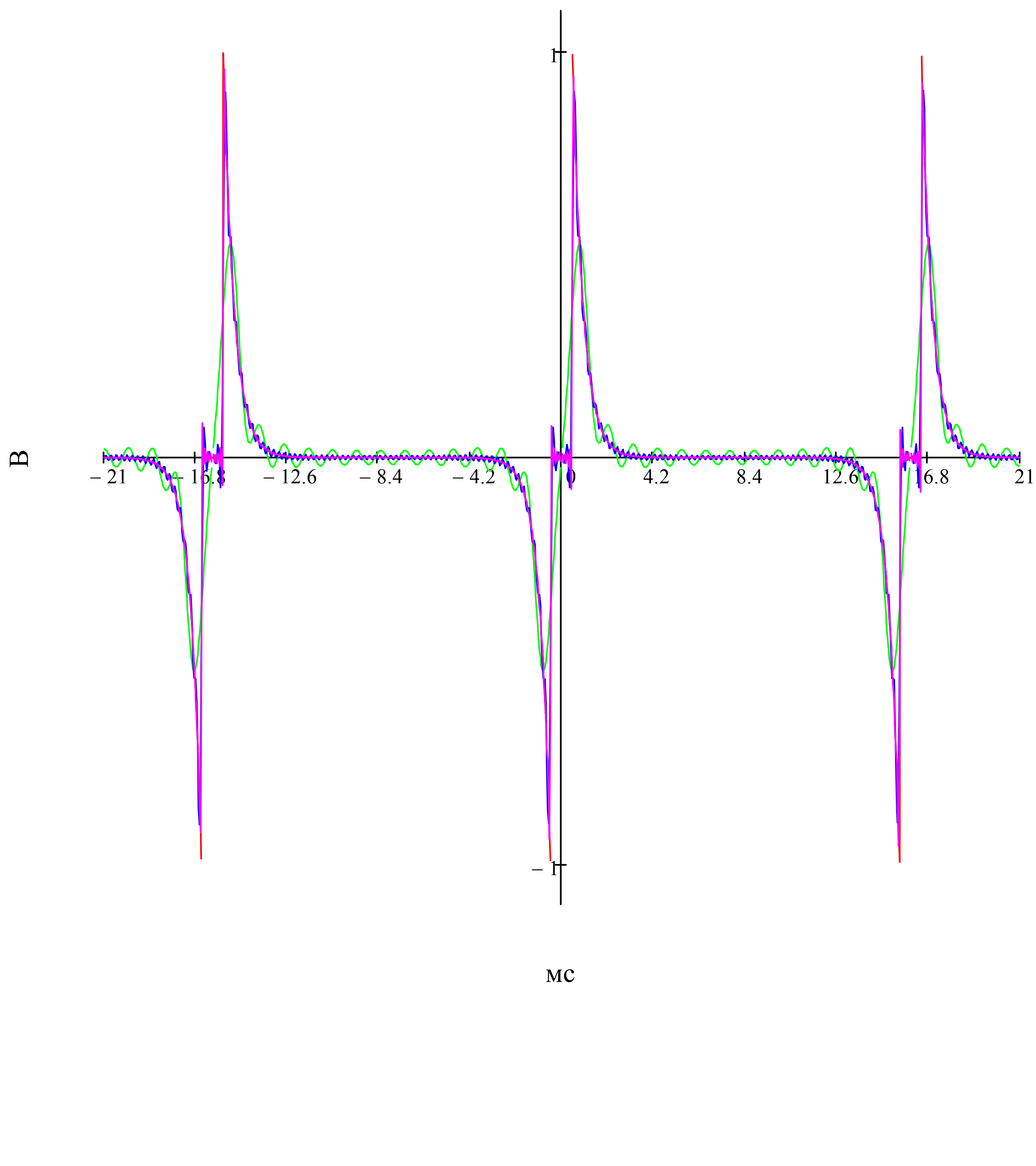
$M75 := 14 \quad M95 := 65 \quad M99 := 245$

8. Восстановим периодические сигналы по гармоникам, определенным в предыдущем пункте.

$$s_{T75}(t) := \sum_{m=-M75}^{M75} \left(C_m(m) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{T} \cdot t} \right) \qquad s_{T95}(t) := \sum_{m=-M95}^{M95} \left(C_m(m) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{T} \cdot t} \right)$$

$$s_{T99}(t) := \sum_{m=-M99}^{M99} \left(C_m(m) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{T} \cdot t} \right)$$

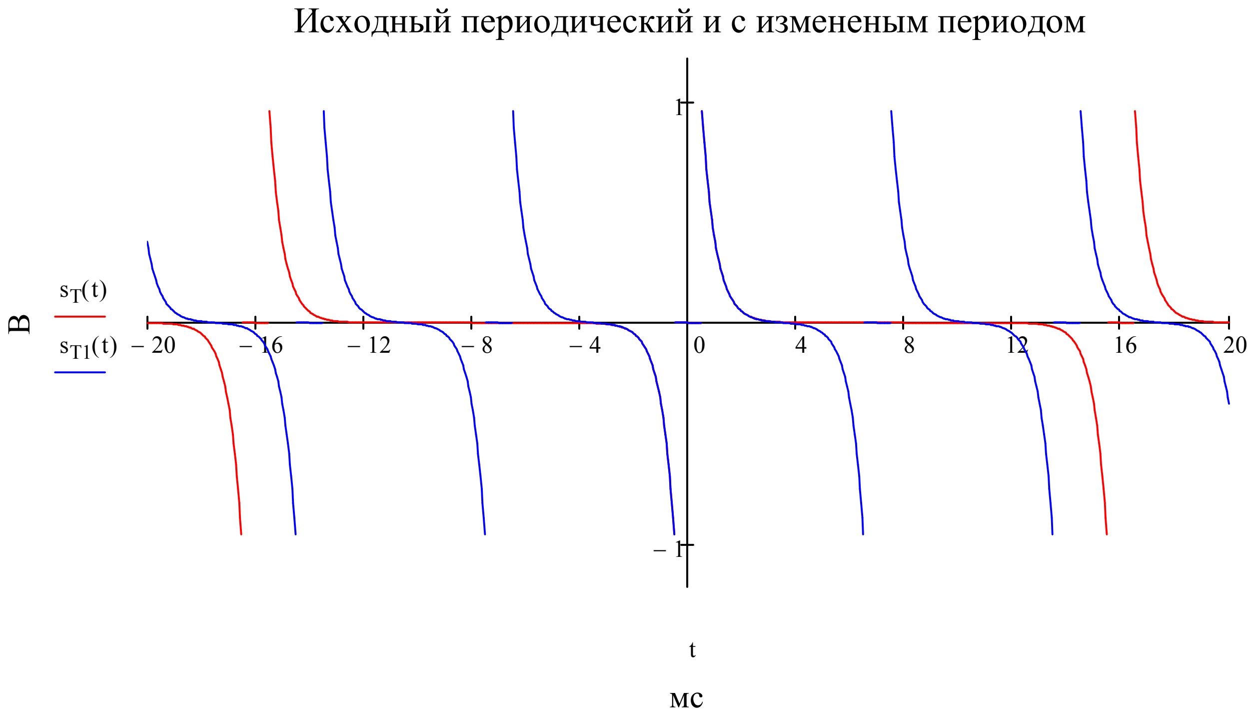
Исходный сигнал, и восстановленые из части гармоник



9. Уменьшим период сигнала до 7 мс.

$T := 7$ мс

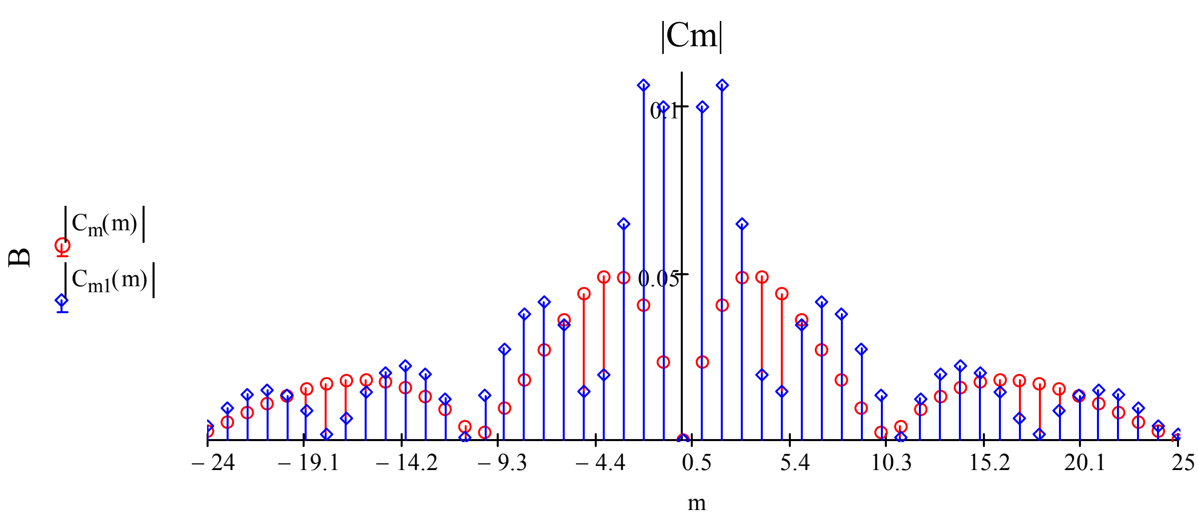
$$s_{T1}(t) := \sum_{m=-30}^{30} s(t - m \cdot T)$$

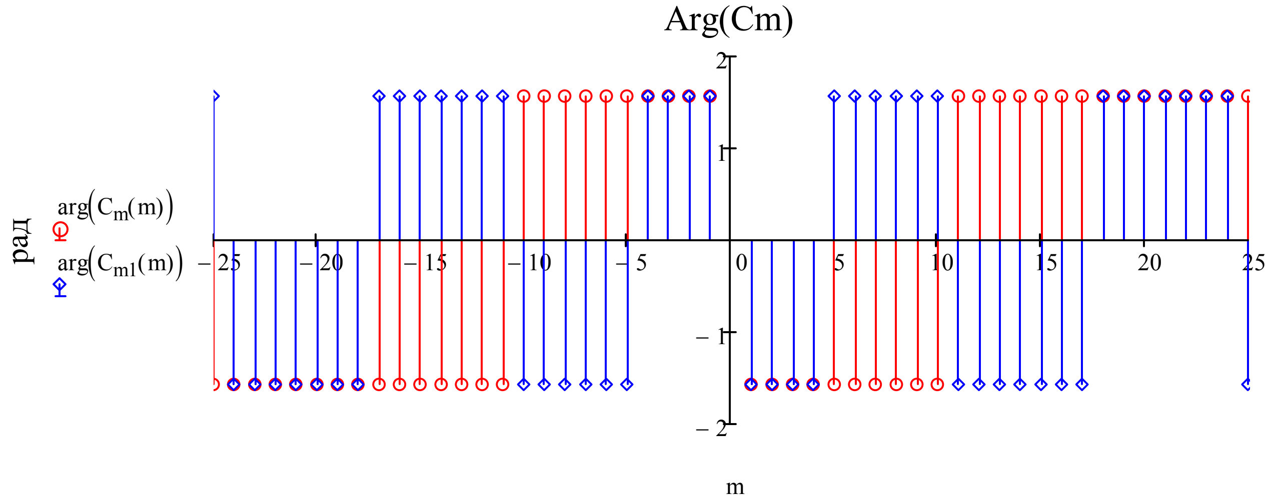


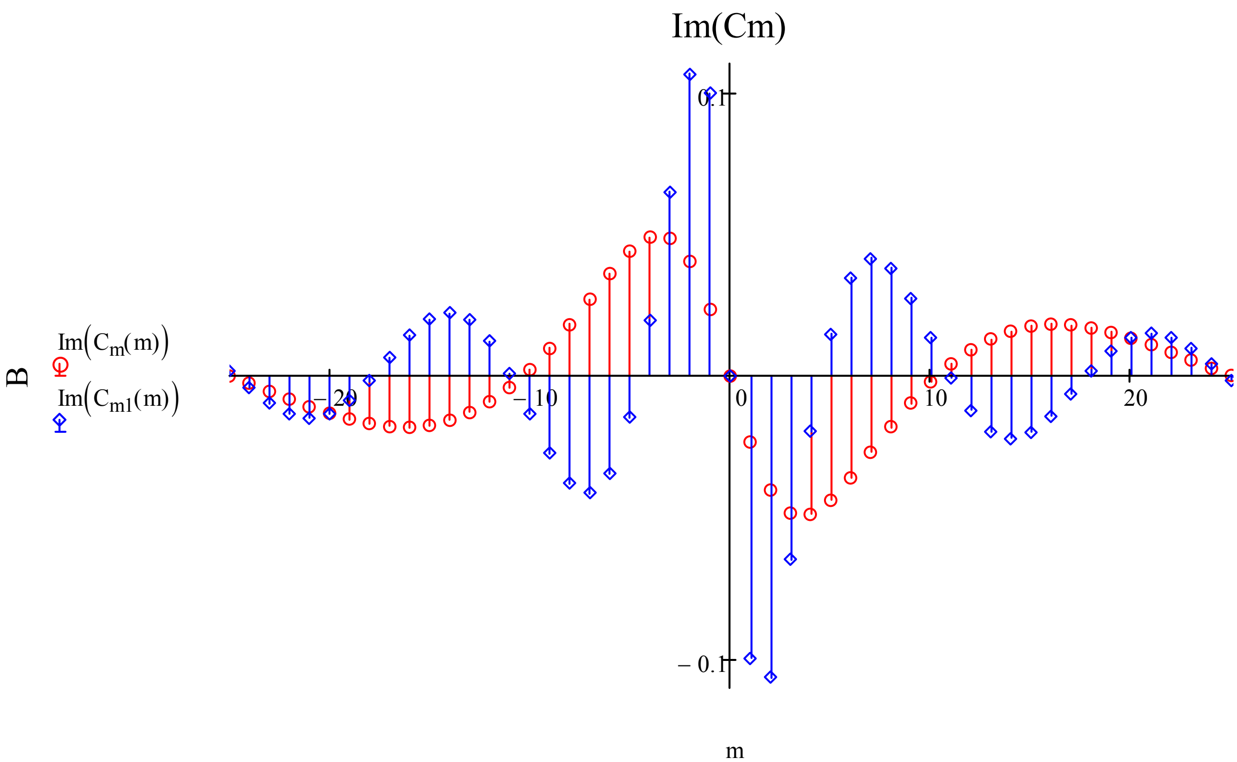
Комплексная форма:

$m := -1000 .. 1000$

$$C_{m1}(m) := \frac{1}{T}\left[\frac{-2A \cdot \left(\alpha \sin\left(2\pi \frac{m}{T} \cdot \Delta\right) + 2\pi \frac{m}{T} \cdot \cos\left(2\pi \frac{m}{T} \cdot \Delta\right)\right) \cdot i}{\alpha^2 + \left(2\pi \frac{m}{T}\right)^2}\right]$$



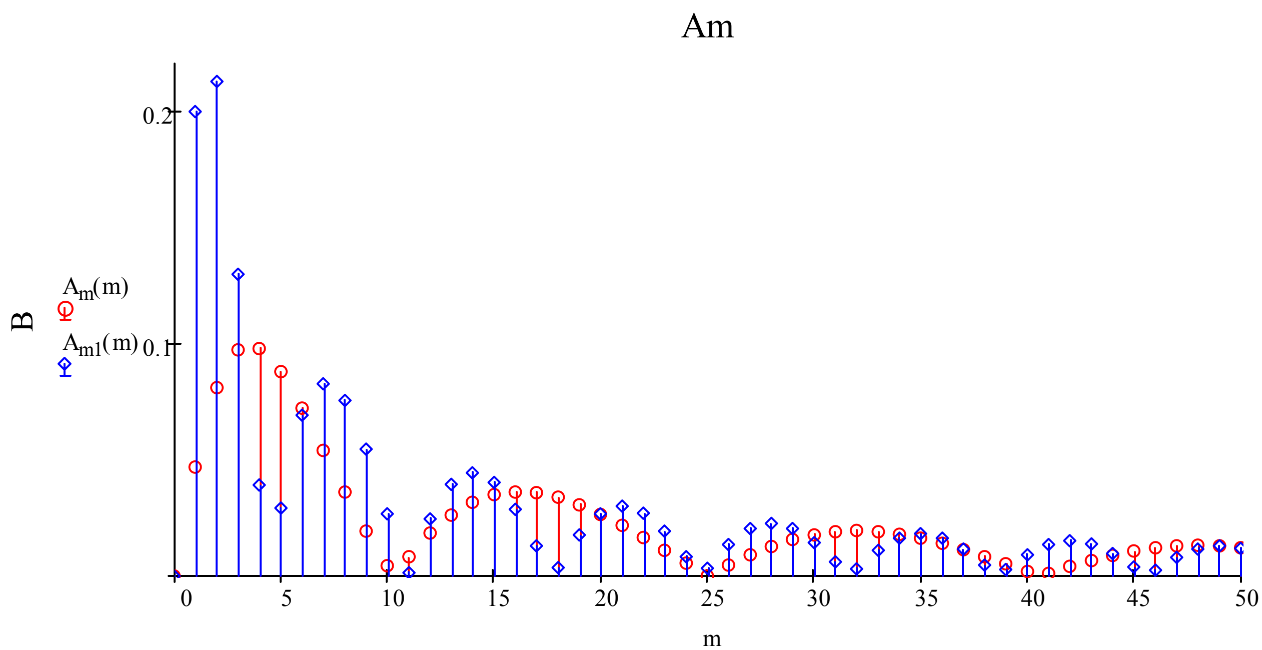

Arg(Cm)
рад
arg(C_m(m))
arg(C_m1(m))
2
1
−1
−2
−25
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
25
m

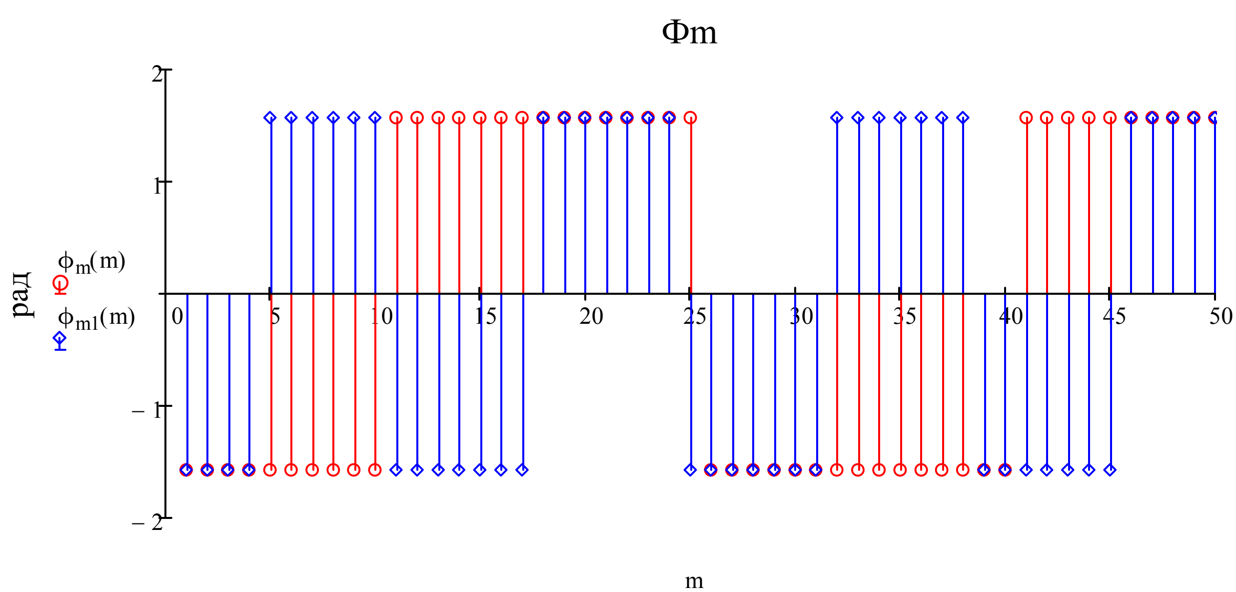

Im(Cm)
В
Im(C_m(m))
Im(C_m1(m))
0.1
−0.1
−20
−10
0
10
20
m

Амплитудно-фазовая форма:

$$A_{m1}(m) := \begin{cases} 2\left|C_{m1}(m)\right| & \text{if } m > 0 \\ 0 & \text{if } m < 0 \\ \left|C_{m1}(m)\right| & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi_{m1}(m) := \begin{cases} \arg\left(C_{m1}(m)\right) & \text{if } m \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

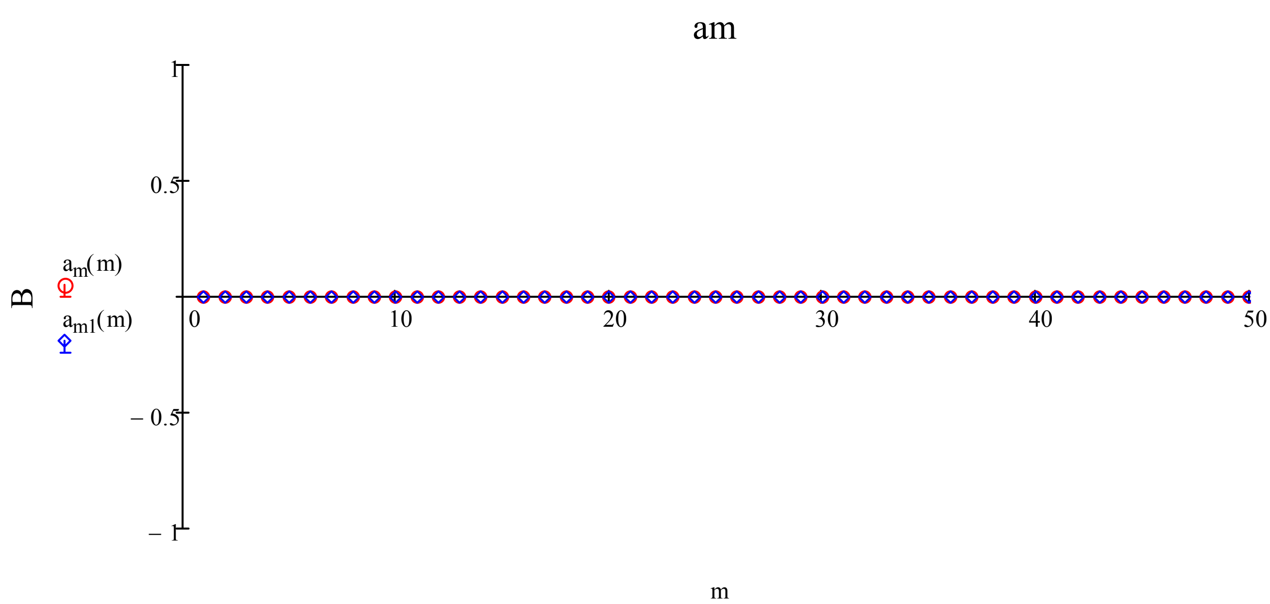


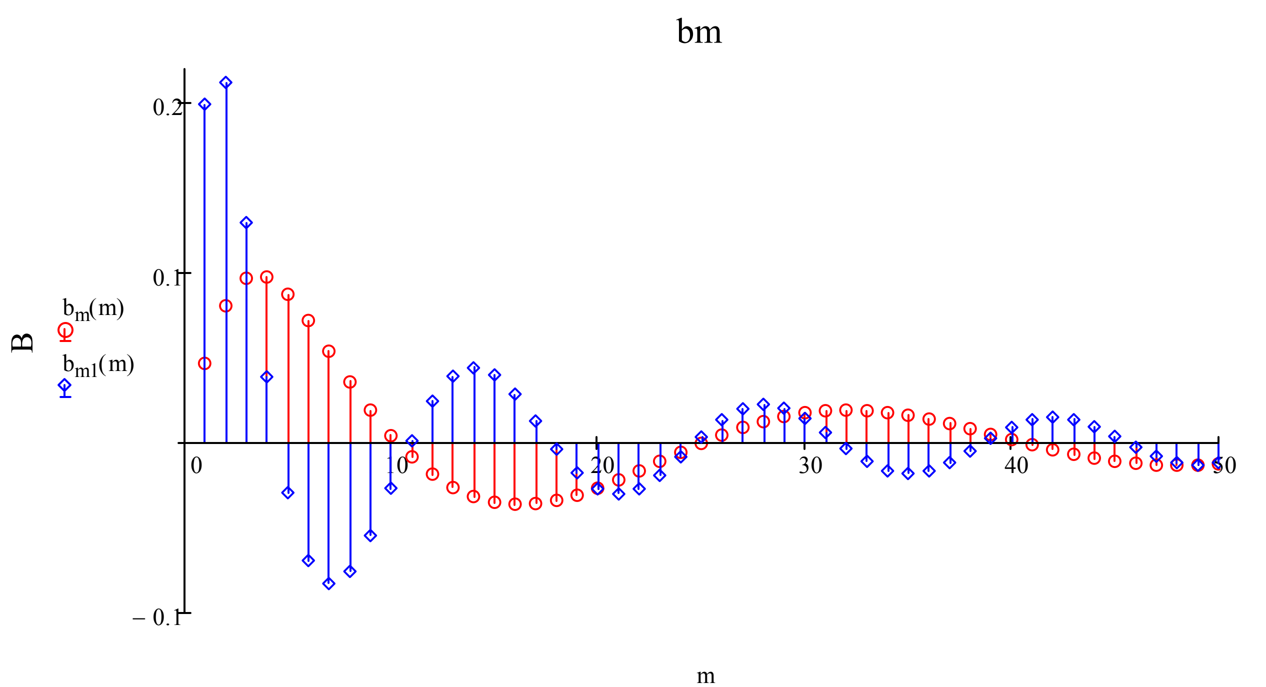


Квадратурная форма:

$$a_{m1}(m) := A_{m1}(m)\cos\left(\phi_{m1}(m)\right)$$

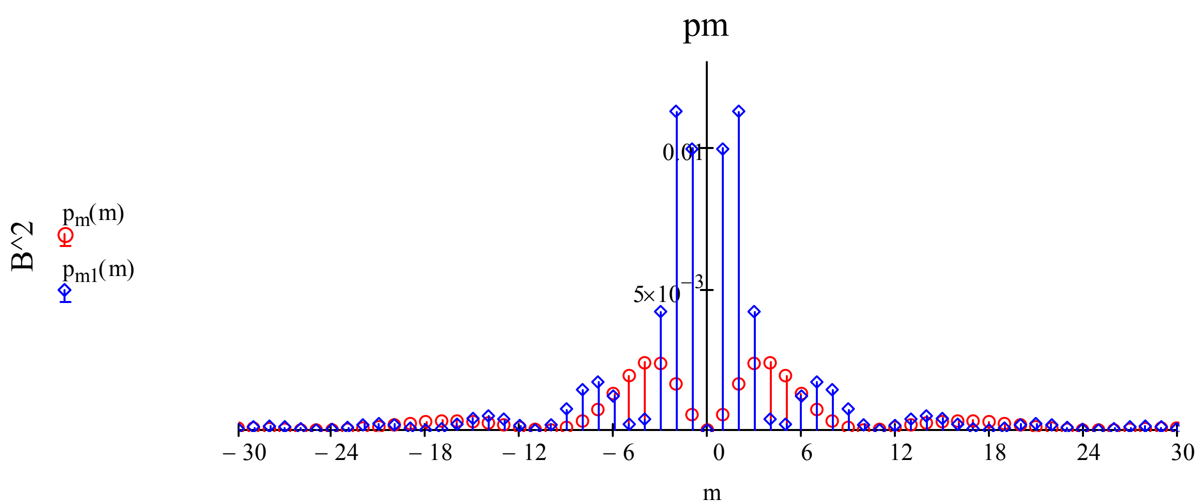
$$b_{m1}(m) := -A_{m1}(m)\sin\left(\phi_{m1}(m)\right)$$



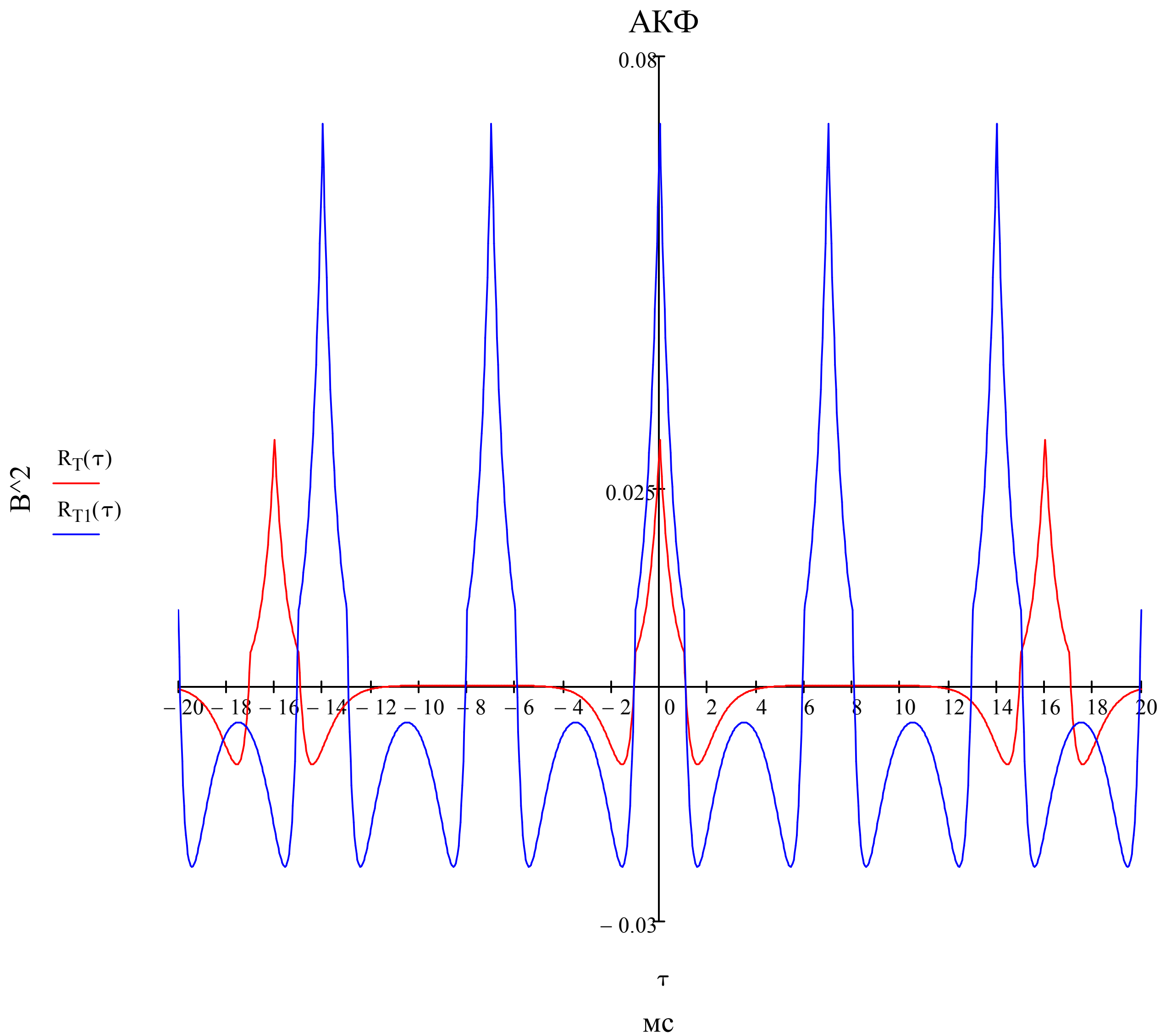


$$p_{m1}(m) := \left(\left|C_{m1}(m)\right|\right)^2$$

$$p_{m1}(m) := \left[\left|\frac{1}{T}\left[\frac{-2A\cdot\left(\alpha\sin\left(2\pi\frac{m}{T}\cdot\Delta\right)+2\pi\frac{m}{T}\cdot\cos\left(2\pi\frac{m}{T}\cdot\Delta\right)\right)\cdot i}{\alpha^2+\left(2\pi\frac{m}{T}\right)^2}\right]\right|\right]^2$$



$$R_{T1}(\tau) := \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-10}^{10} R(\tau - n \cdot T)$$



$$P_{cp1} := \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\left|s_{T1}(t)\right|\right)^2 dt = 0.071 \ \text{B}^2$$

$$P_{cp1} := \sum_{m=-300}^{300} p_{m1}(m) = 0.071 \ \text{B}^2$$

$$P_{cp1} := R_{T1}(0) = 0.071 \ \text{B}^2$$

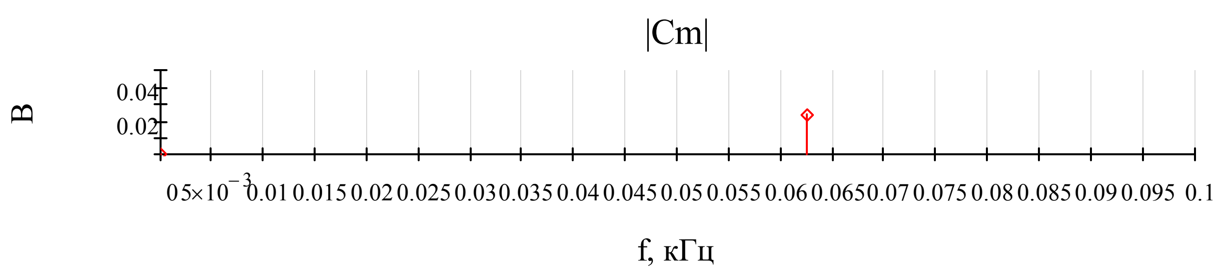
10. Выводы.

При анализе заданного периодического сигнала можно отметить следующее:

1. Значение средней мощности, рассчитанное по сигналу, равна значению, рассчитанному по спектру мощности и составляет $31*10^{-3}$ $В^2$. Это следует из теоремы Парсеваля. Так же значение АКФ в нуле равно $31*10{-}^{3}$ $В^2$.Так как АКФ связана со спектром мощности ПФ и для двух этих функций работает свойство площади, то есть площадь под спектром мощности (что и является средней мощностью сигнала) равно значению АКФ в нуле. Период АКФ равен периоду сигнала.

2. Площадь периодического сигнала равна значению спектра в нуле, так как она равна нулю, Постоянная составляющая сигнала: Cm(0)=0. Так же как и у одиночного импульса, спектр периодического сигнала имеет только мнимую часть, но принимает дискретные значения. Каждая δ-функция находится в точке m/T. Если посмотреть на график |Cm|, расположенный ниже, можно увидеть, что это расстояние примерно равно 62,5 Гц. период и частота имеют связь F*T=1, таким образом, мы получаем: 1/62,5 кГц=16 мс - период заданного периодического сигнала.

$T := 16$ мс



3. Если посмотреть на квадратурную форму, можно заметить, что отсутствует косинусная составляющая сигнала. Так же по комплексной форме видно, что из-за нечетной симметрии сигнала, гармоники косинуса тоже отсутствуют. Это объясняется тем, что одиночный импульс чисто действительная и нечетная функция.

4. Если обратить внимание на сигналы восстановленные из спектра вблизи скачков, можно увидеть эффект Гиббса, так же как и у одиночного импульса. Но по сравнению с одиночным импульсом, амплитуда "выбросов" уменьшилась и они наблюдаются только вблизи оси абсцисс

При анализе изменений характеристик сигнала, вследствие уменьшения периода сигнала до 7мс, можно сделать следующие выводы:

1. Расстояние между δ-функциями спектра сигнала увеличилось с 1/16=62,5 кГц до 1/7=143 кГц. То есть при уменьшении периода сигнала, частота колебания гармоник увеличивается, и наоборот.

2. Спектр и спректр мощности сигнала "колеблются" с большей частотой (примерно в 2 раза), но в близи нуля амплитуда выросла прмерно в 2 и 4 раза соответственно. Средняя мощность сигнала увеличилась до 0,071 $В^2$

3. Значение АКФ в нуле увеличилось до 0,071 $В^2$, что соответствует изменению средней мощностисигнала. Так как период сигнала стал меньше его физической длительности, следовательно одиночные импульсы накладываются друг на друга. В след за уменьшением периода сигнала, уменьшился и период АКФ. Как видно из графика у того сигнала, период которого меньше, АКФ не имеет нулевого участка между максимумами. Это происходит из-за того, что ее физическая длительность меньше периода и наблюдается наложение АКФ соседних периодов.