

Столяров Сергей Анатольевич гр. 14-302

Вариант №48

1 Выбор параметров сигнала

Амплитуда сигнала $A := 1$ В

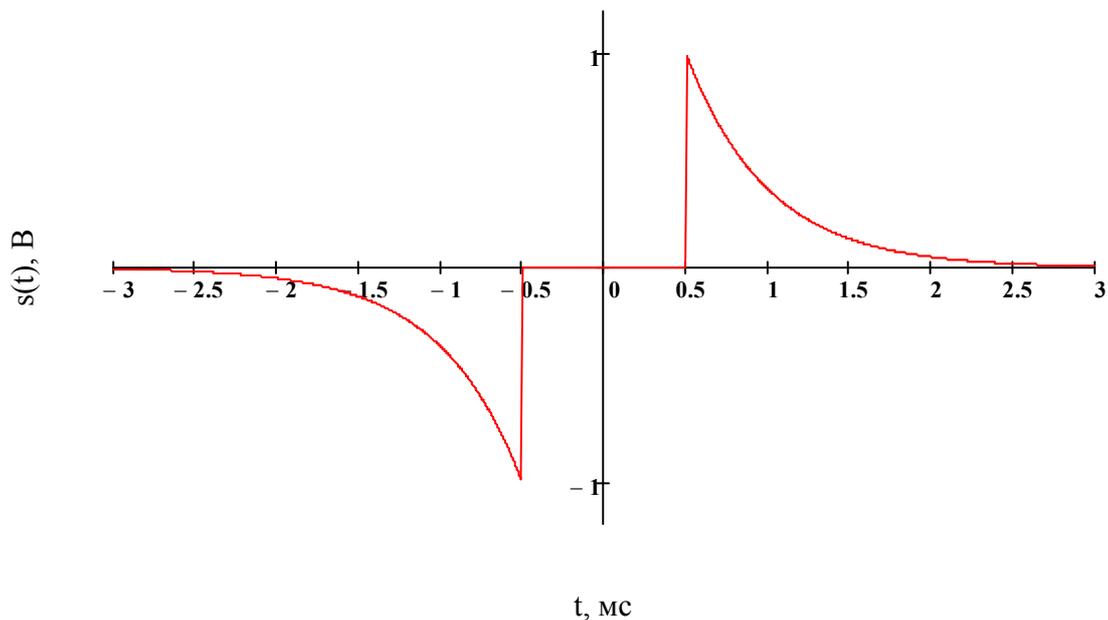
Запаздывание сигнала $\Delta := \frac{1}{2}$ мс

Постоянная времени сигнала $\alpha := \frac{1}{\Delta}$ КГц

Аналитическое выражение сигнала и его график

$$s(t) := \begin{cases} -A \cdot e^{-\alpha \cdot (t+\Delta)} & \text{if } t \leq \Delta \\ A \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\Delta)} & \text{if } t \geq \Delta \\ 0 & \text{if } |t| < \Delta \end{cases}$$

График исходного сигнала $s(t)$



2. Найдем энергию сигнала

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} (|s(t)|)^2 dt$$

Так как сигнал можно представить в виде суммы 2-х сигналов, то данный интеграл можно разбить на 2

$$\Theta := \int_{-\infty}^{-\Delta} A^2 \cdot e^{2\alpha \cdot (t+\Delta)} dt + \int_{\Delta}^{\infty} A^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot (t-\Delta)} dt \rightarrow \frac{1}{2} B^2 \cdot c$$

Аналитическое выражение энергии сигнала выглядит так:

$$\Theta = \frac{A^2}{\alpha} = 0.5 B^2 \cdot c$$

Видно, что значения, рассчитанные аналитически и численно, совпадают.

3. Найдем Аналитическое выражение спектра сигнала и построим его графики

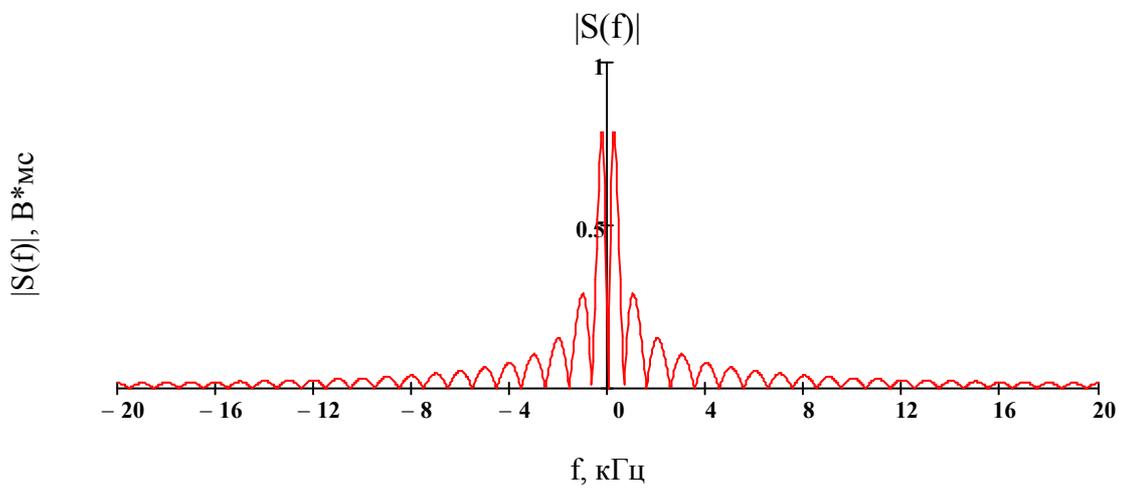
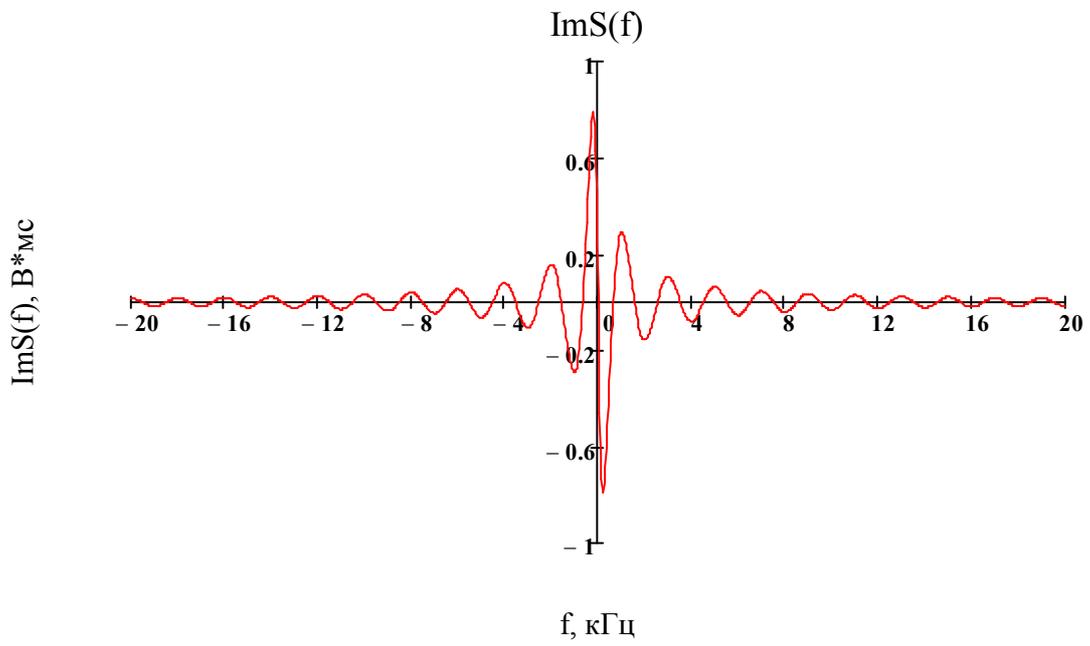
Так как сам сигнал состоит из 2-х частей, то и спектр можно представить, как сумму спектров 2-х сигналов.

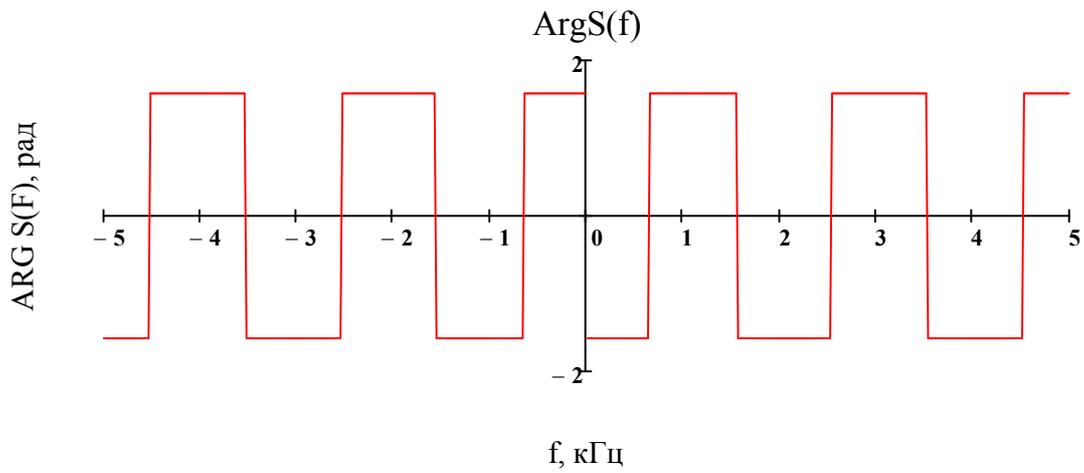
$$S1(f) := \frac{-A \cdot e^{2\pi f \cdot \Delta \cdot i}}{\alpha - 2\pi f \cdot i} \quad S2(f) := \frac{A \cdot e^{-2\pi f \cdot \Delta \cdot i}}{\alpha + 2\pi f \cdot i}$$

Сложив 1 и 2 части спектра и упростив полученное выражение, получаем:

$$S(f) := \frac{-2A \cdot (\alpha \sin(2\pi f \cdot \Delta) + 2\pi f \cdot \cos(2\pi f \cdot \Delta)) \cdot i}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

Так как исходный сигнал имеет нечетную симметрию, то его спектр должен быть чисто мнимой функцией. Построим мнимую часть спектра, его модуль и аргумент:

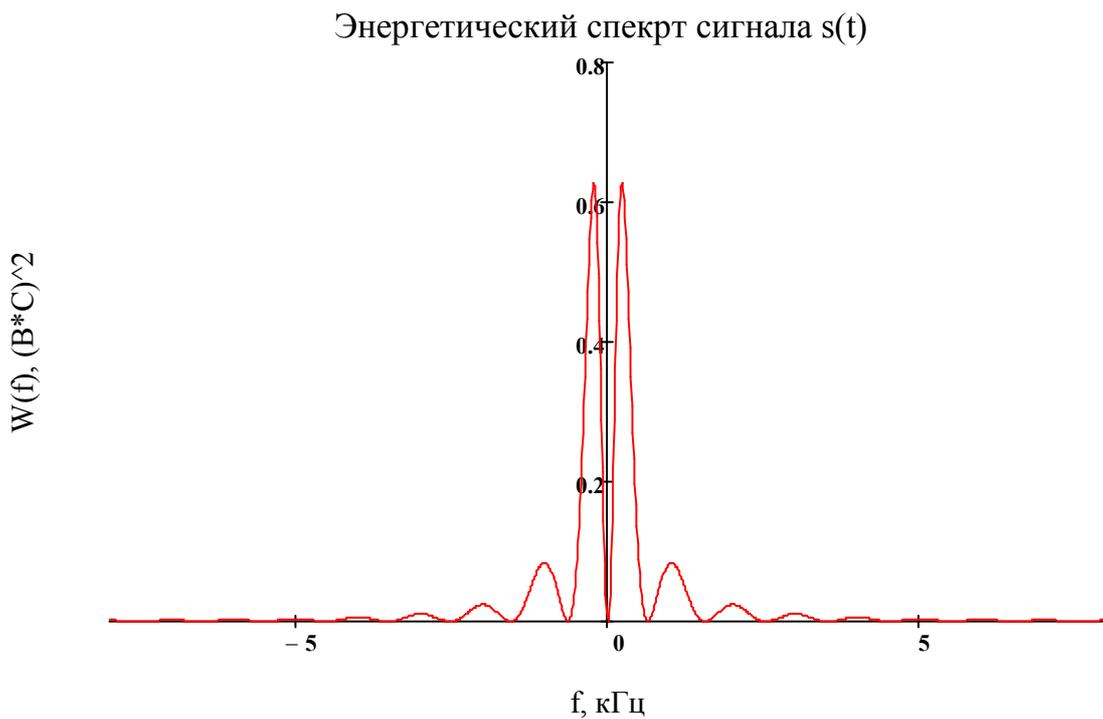




4. Энергетический спектр сигнала

Аналитическое выражение энергетического спектра:

$$W(f) := (|S(f)|)^2 \rightarrow \frac{(|4 \cdot \sin(\pi \cdot f) \cdot i + 4 \cdot \pi \cdot f \cdot \cos(\pi \cdot f) \cdot i|)^2}{(|4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 + 4|)^2}$$



Вычислим энергию сигнала по ее энергетическому спектру:

$$\mathcal{E} = 2 \cdot \int_0^{\infty} W(f) df = 0.5 \quad \text{В}^2 \text{мс}$$

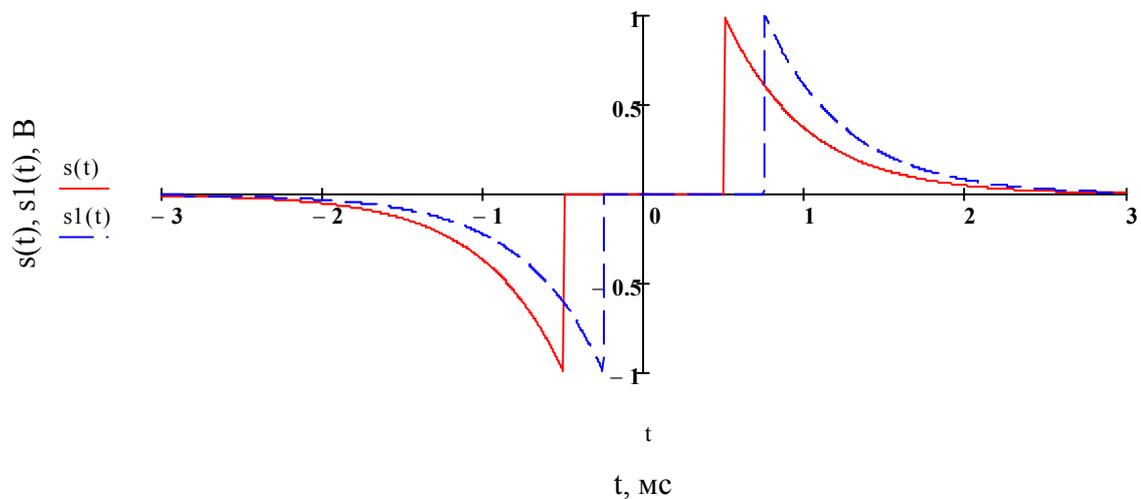
Значение энергии, вычисленной по энергетическому спектру сигнала, совпадает со значением, вычисленным по самому сигналу.

5 Автокорреляционная функция.

Найдем Аналитическое выражение АКФ. Так как эта функция всегда четная, то можно рассматривать только ту ее область, где $\tau > 0$. Разобьем функцию на 2 интервала: $0 < \tau < 2\Delta$ и $\tau > 2\Delta$.

1 $0 < \tau < 2\Delta$

$$s1(t) := \begin{cases} -A \cdot e^{-\alpha \cdot (t + .5\Delta)} & \text{if } t \leq -.5\Delta \\ A \cdot e^{-\alpha \cdot (t - 1.5\Delta)} & \text{if } t \geq 1.5\Delta \\ 0 & \text{if } -.5\Delta < t < 1.5\Delta \end{cases}$$

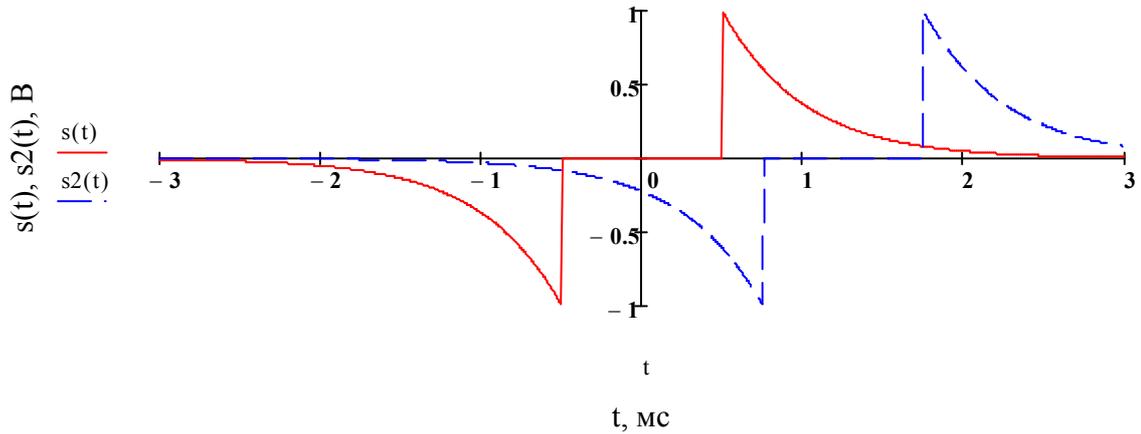


$$\int_{-\infty}^{-\Delta} A^2 \cdot e^{-\alpha \cdot (2t + 2\Delta - \tau)} dt + \int_{\Delta + \tau}^{\infty} A^2 \cdot e^{-\alpha \cdot (2t - 2\Delta - \tau)} dt \rightarrow \frac{e^{-2 \cdot \tau}}{2}$$

$$R1(\tau) := \frac{A^2}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}$$

$$1 \tau > 2\Delta.$$

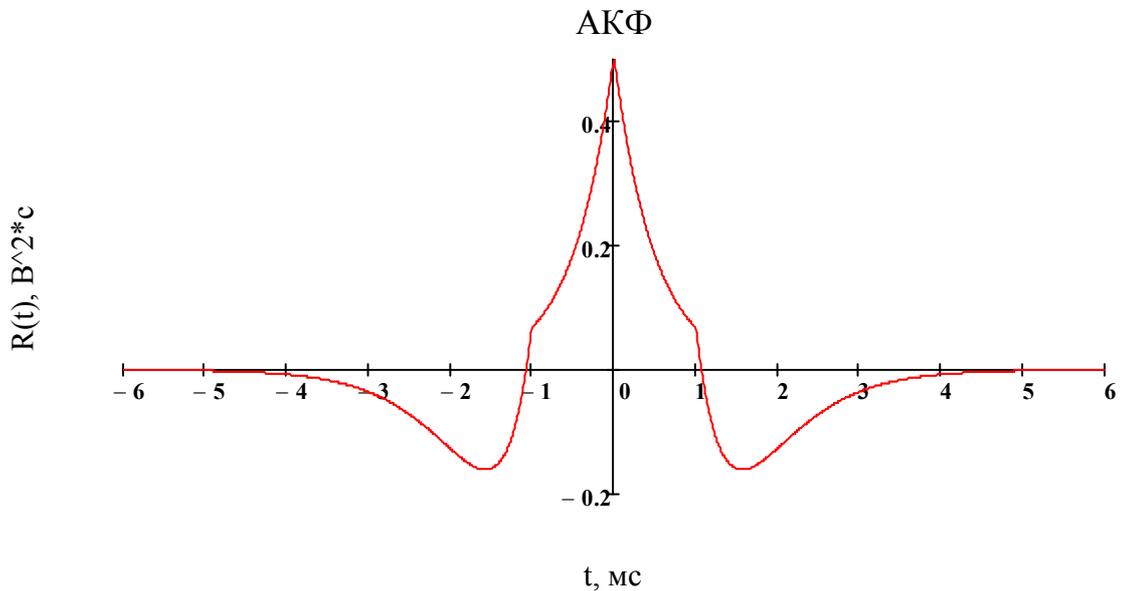
$$s_2(t) := \begin{cases} -A \cdot e^{\alpha \cdot (t-1.5\Delta)} & \text{if } t \leq 1.5\Delta \\ A \cdot e^{-\alpha \cdot (t-3.5\Delta)} & \text{if } t \geq 3.5\Delta \\ 0 & \text{if } 1.5\Delta < t < 3.5\Delta \end{cases}$$



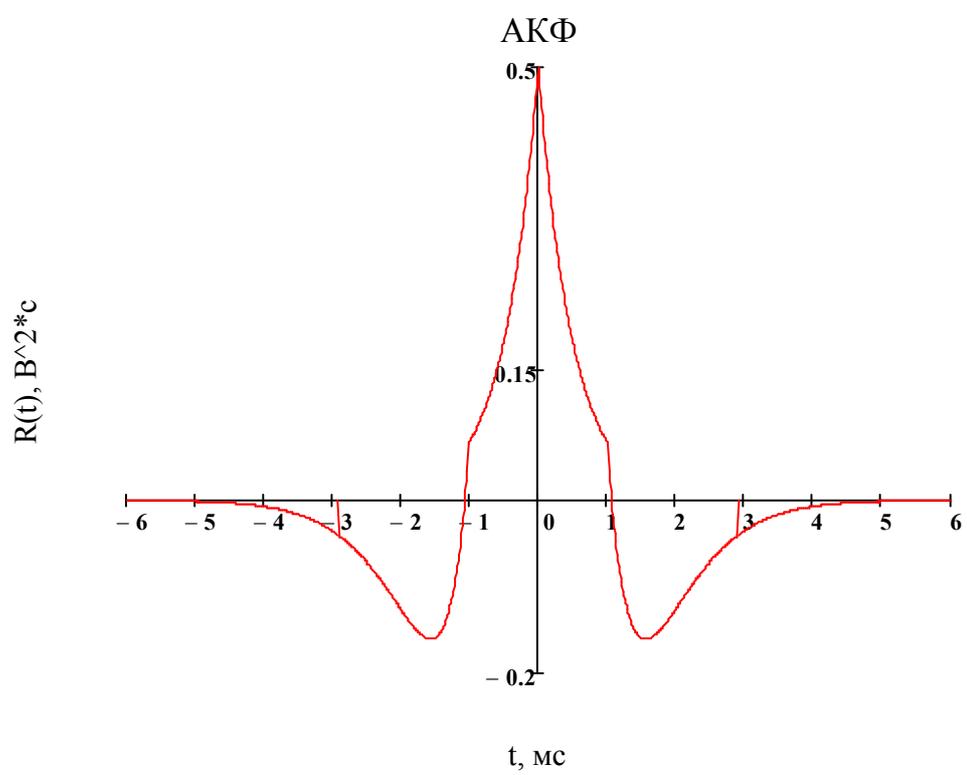
$$\int_{-\infty}^{-\Delta} A^2 e^{\alpha \cdot (t+\Delta)} \cdot e^{\alpha \cdot (t+\Delta-\tau)} dt + \int_{\Delta+\tau}^{\infty} A^2 e^{-\alpha \cdot (t-\Delta)} \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\Delta-\tau)} dt \rightarrow \frac{e^{-2 \cdot \tau}}{2}$$

$$\int_{\Delta}^{\tau-\Delta} A e^{-\alpha \cdot (t-\Delta)} \cdot (-A) \cdot e^{\alpha \cdot (t+\Delta-\tau)} dt \rightarrow -e^{2-2 \cdot \tau} \cdot (\tau - 1) \quad R_2(\tau) := \frac{A e^{-\alpha \cdot \tau}}{\alpha} - e^{-\alpha \cdot (\tau-2\Delta)} \cdot (\tau - 2\Delta)$$

$$R(\tau) := \begin{cases} R_1(|\tau|) & \text{if } 0 \leq |\tau| \leq 2\Delta \\ R_2(|\tau|) & \text{if } |\tau| > 2\Delta \end{cases}$$

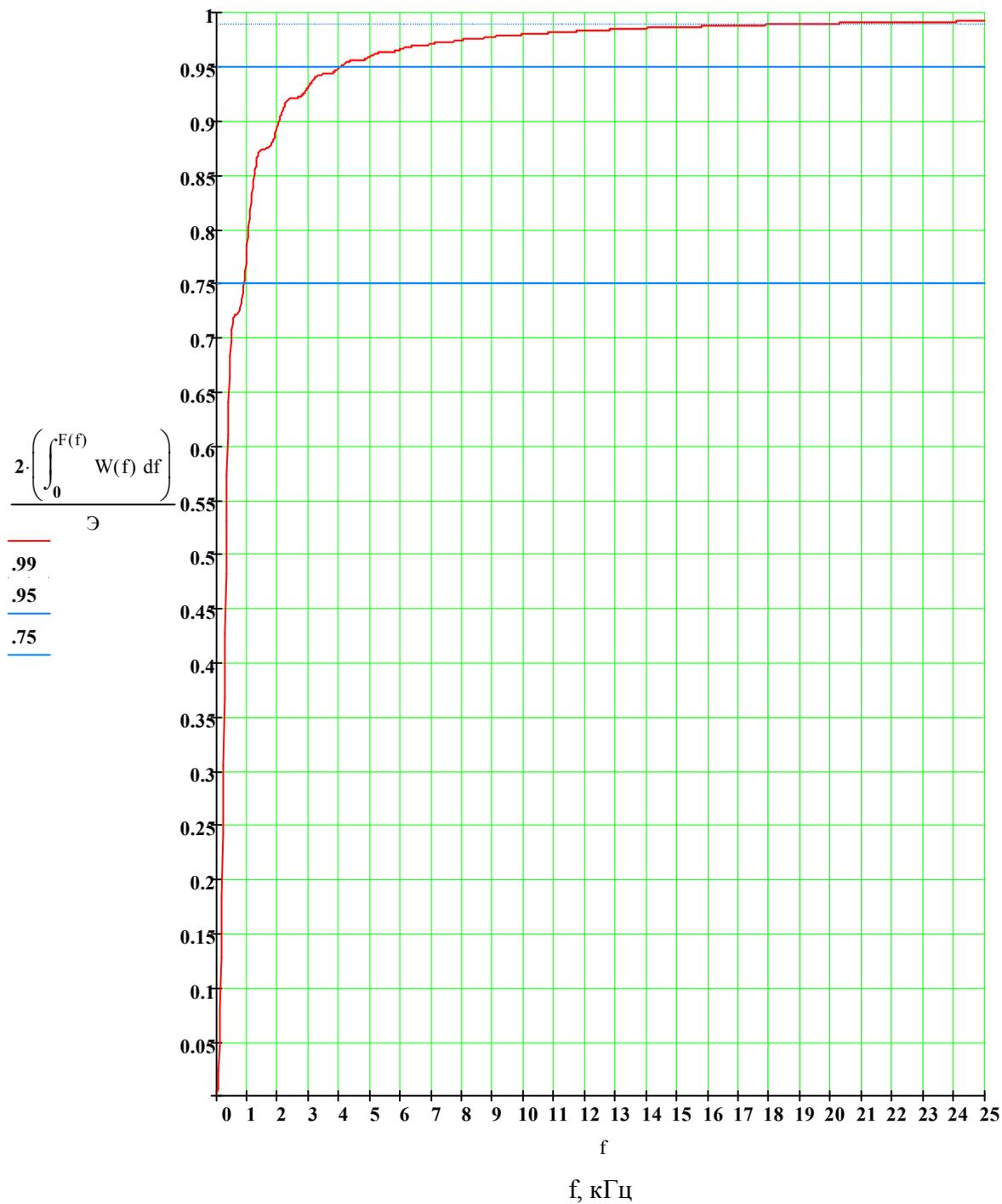


Теперь построим график Акф путем численного интегрирования



6 Зависимость Доли энергии, попадающей в полосу частот Δf , от ширины полосы.

$$F(f) := f$$

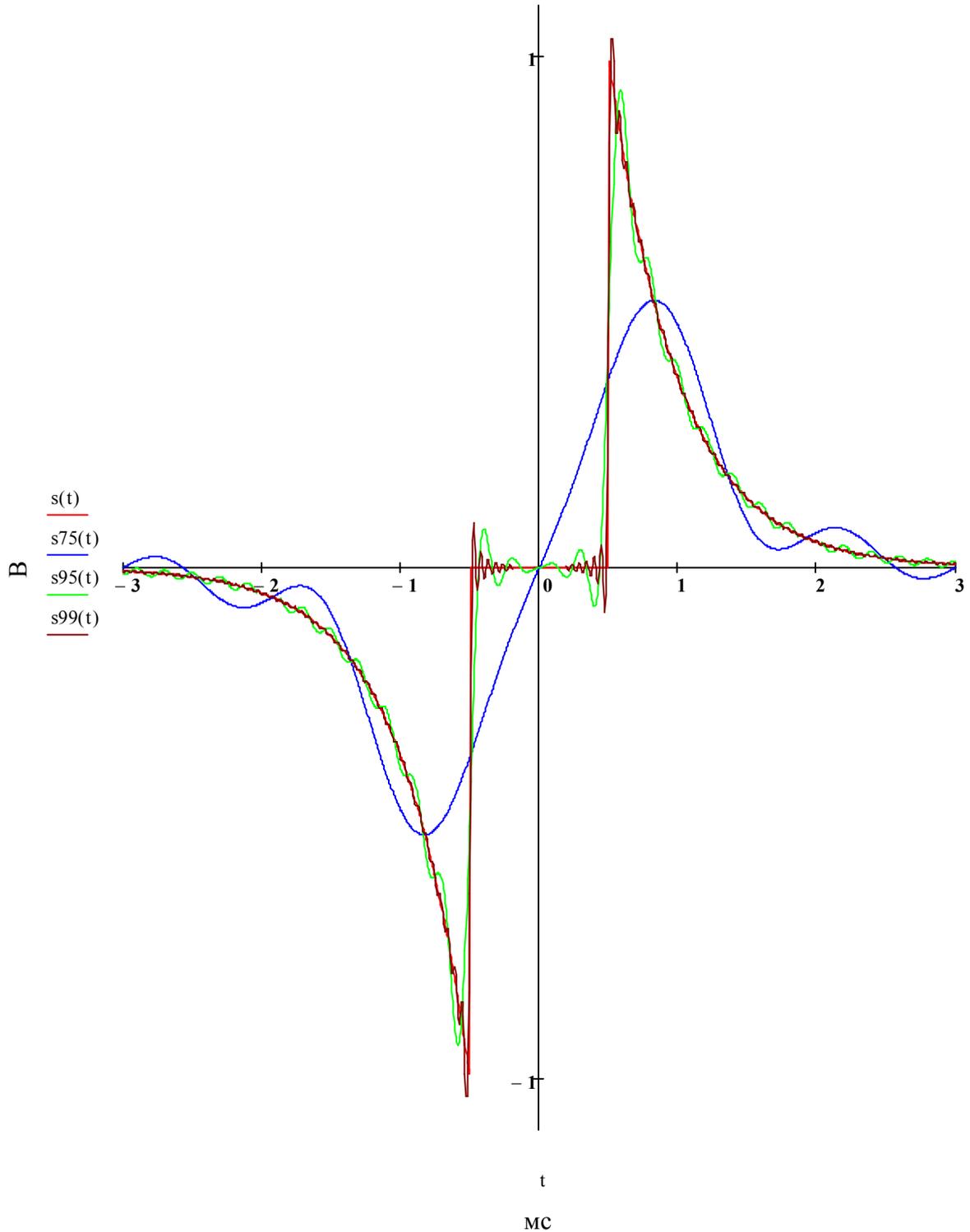


$$F_{.75} := .9 \text{ кГц} \quad F_{.95} := 5 \text{ кГц} \quad F_{.99} := 19 \text{ кГц}$$

7. Восстановим исходный сигнал из части спектральной плотности сигнала

$$s_{75}(t) := \int_{-F_{75}}^{F_{75}} S(f) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} df \quad s_{95}(t) := \int_{-F_{95}}^{F_{95}} S(f) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} df \quad s_{99}(t) := \int_{-F_{99}}^{F_{99}} S(f) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} df$$

Исходный сигнал и восстановленные из части спектра

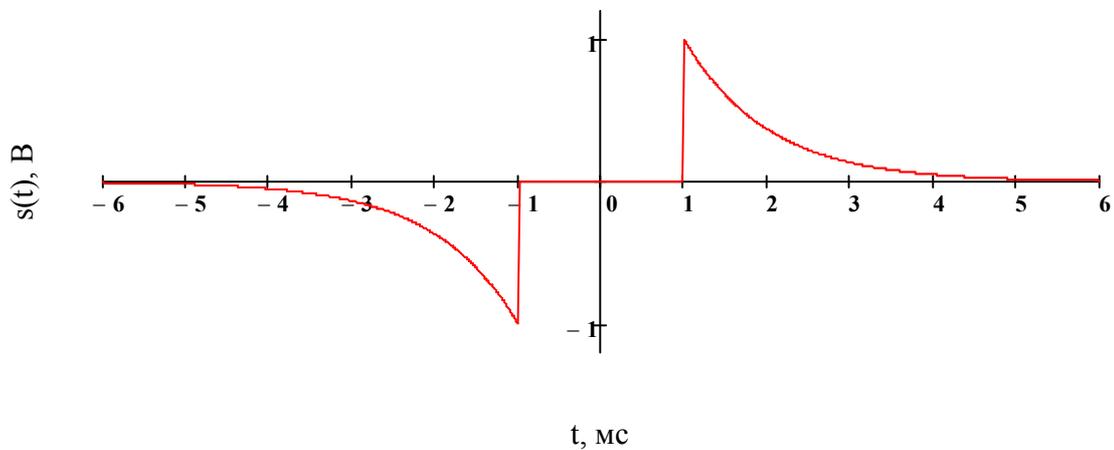


8. Увеличим длительность сигнала в 2 раза и постоим графики Сигнала, Спектральной плотности, энергетического спектра и АКФ. Вычислим энергию сигнала.

$$\Delta := 1 \quad \text{мс} \qquad \alpha := \frac{1}{\Delta} = 1 \quad \text{КГц}$$

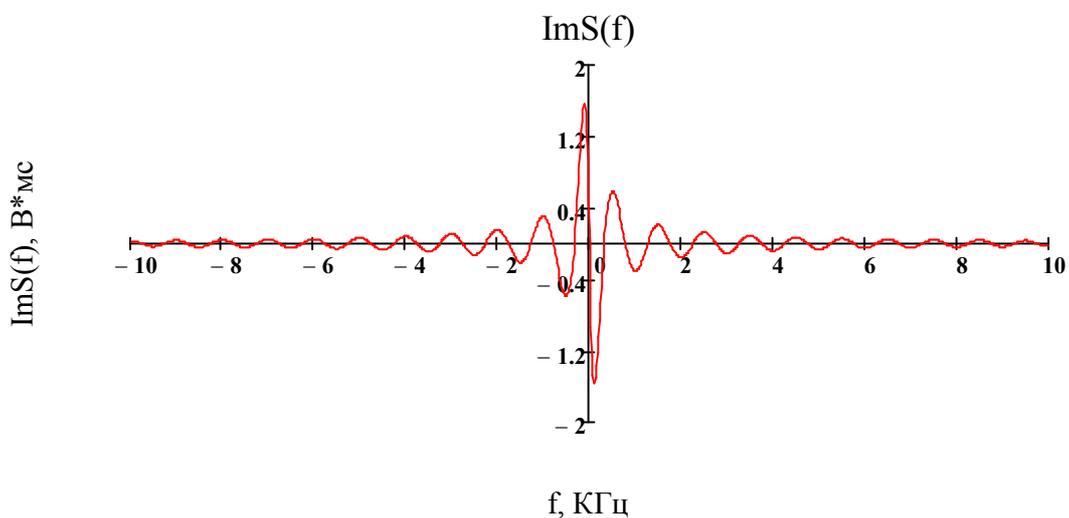
$$s(t) := \begin{cases} -A \cdot e^{-\alpha \cdot (t+\Delta)} & \text{if } t \leq -\Delta \\ A \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\Delta)} & \text{if } t \geq \Delta \\ 0 & \text{if } |t| < \Delta \end{cases}$$

График исходного сигнала s(t)

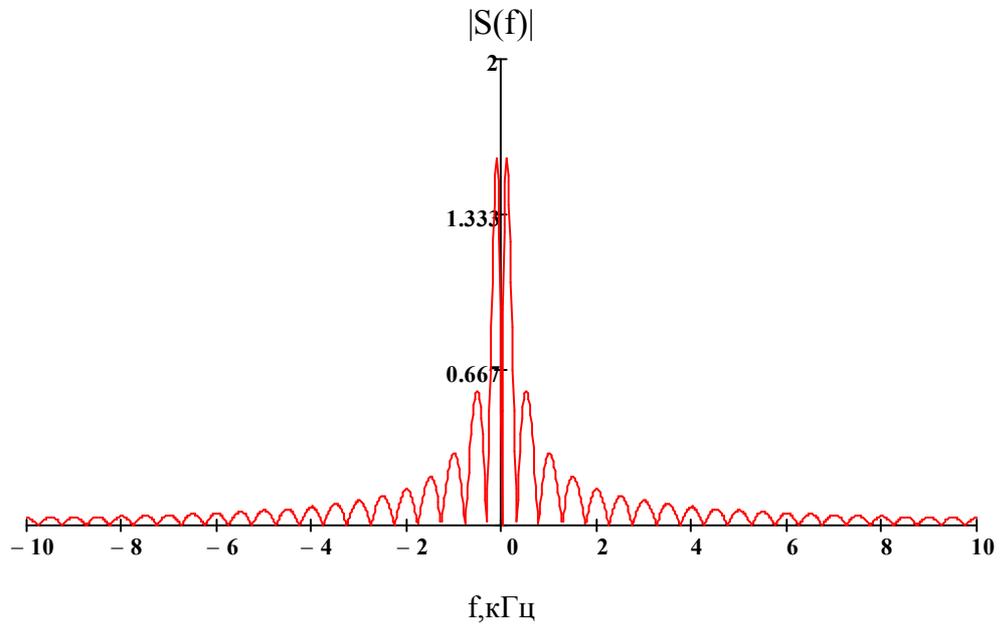


$$S(f) := \frac{-2A \cdot (\alpha \sin(2\pi f \cdot \Delta) + 2\pi f \cdot \cos(2\pi f \cdot \Delta)) \cdot i}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

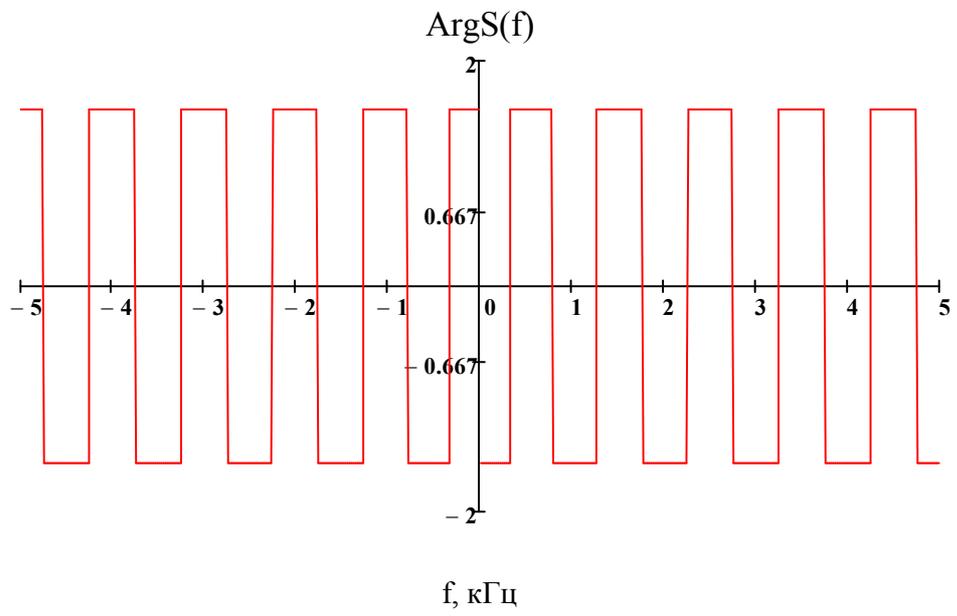
$$\Theta = \frac{A^2}{\alpha} = 1 \quad \text{В}^2 \cdot \text{с}$$



$|S(f)|, B^*_{MC}$

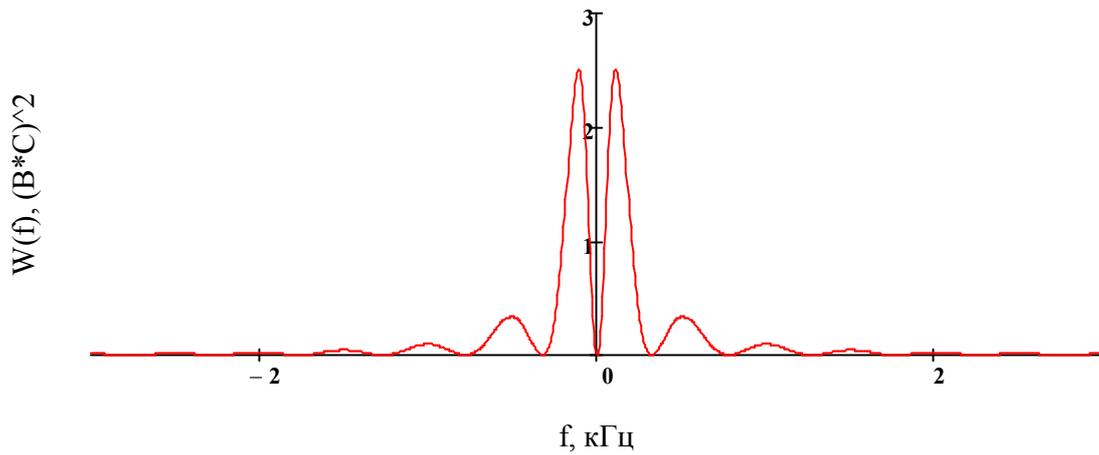


$ARG S(f), \text{рад}$



$$W(f) := (|S(f)|)^2 \rightarrow \frac{(|2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f) \cdot i + 4 \cdot \pi \cdot f \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f) \cdot i|)^2}{(|4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 + 1|)^2}$$

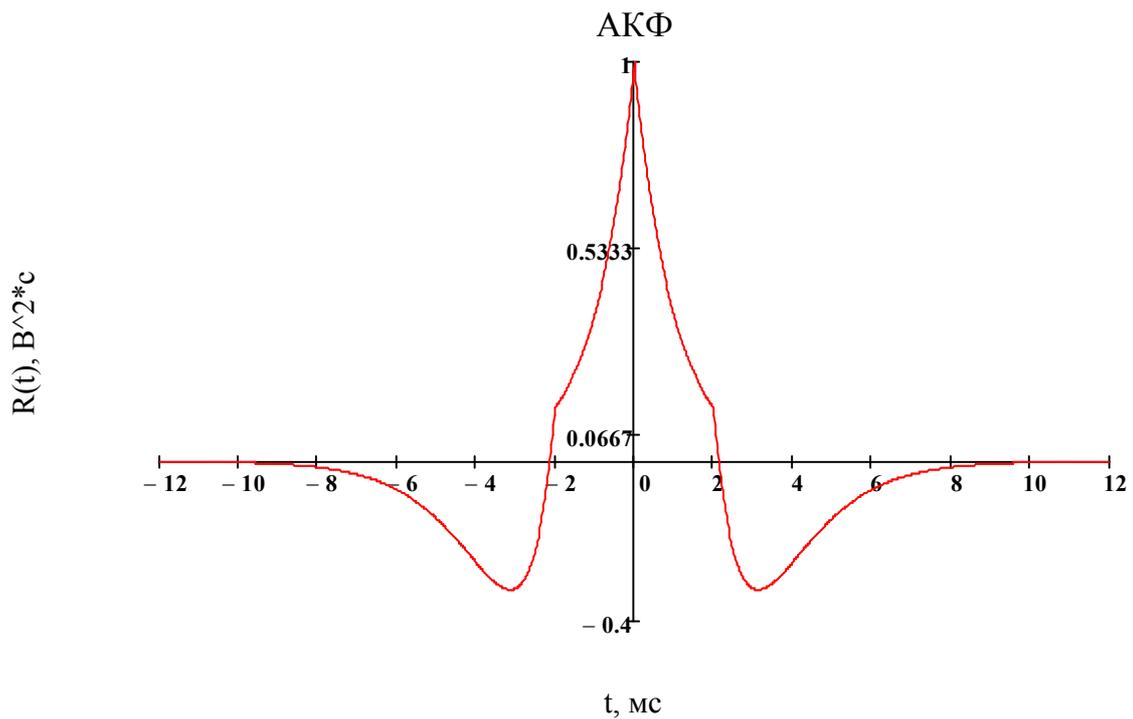
Энергетический спектр сигнала s(t)



$$R2(\tau) := \frac{A^2}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} - e^{-\alpha \cdot (\tau - 2\Delta)} (\tau - 2\Delta)$$

$$R1(\tau) := \frac{A^2}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}$$

$$R(\tau) := \begin{cases} R1(|\tau|) & \text{if } 0 \leq |\tau| \leq 2\Delta \\ R2(|\tau|) & \text{if } |\tau| > 2\Delta \end{cases}$$



9. Выводы.

Энергия сигнала, рассчитанная во втором пункте, по сигналу, совпадает с энергией, рассчитанной по энергетическому спектру в пятом пункте и для выбранных характеристик равна $1/2 V^2 \cdot \text{мс}$. Значение Акф в нуле равно энергии сигнала. Площадь заданного сигнала равна нулю, и значение спектра, по свойству площади, также равно нулю. Так как заданный сигнал является нечетной функцией, то его спектр чисто мнимый. Сигнал имеет Физическую длительность 6 мс, а АКФ 12 мс. Из графика сигнала, восстановленного из части спектра, который вмещает в себя 99% энергии, можно увидеть, что период колебаний примерно равен 0.05 мс, что соответствует частоте 20 КГц. Полоса частот, в которой содержится 99% энергии сигнала, примерно равна от -19 до +19 КГц, если принять во внимание погрешность определения этих величин, то можно сказать, что они равны. Можно сделать вывод, что чем шире полоса частот, из которой восстанавливается сигнал, тем период его колебаний относительно исходного будет меньше и в пределе достигнет нуля. При рассмотрении области, где происходит скачек исходного импульсного сигнала можно заметить, что все восстановленные сигналы проходят через середину скачка. Отклонение восстановленного сигнала от исходного максимально вблизи скачка. При увеличении полосы частот, из которой восстанавливается сигнал, увеличивается отклонение восстановленного сигнала, его максимальное значение определяется амплитудой скачка и составляет примерно 12% от его величины. Такое поведение восстановленного сигнала вблизи скачка называется эффектом Гиббса.

При увеличении длительности сигнала в 2 раза, его энергия увеличилась в 2 раза и составляет $1 V^2 \cdot \text{мс}$. Из графика Энергетического спектра видно, что его физическая длительность уменьшилась примерно в 2 раза, а это значит, что полоса частот, в которой содержится большая часть энергии сигнала, тоже уменьшилась. Так как исходный сигнал является нечетной функцией, то его площадь не изменилась, это так же видно из графика Амплитудного спектра.