Столяров С.А. гр. 14-302
Курсовая работа часть II
Анализ периодических сигналов

1. Выберем численное значение периода сигнала. Запишем аналитическое выражение периодического сигнала и построим его график.

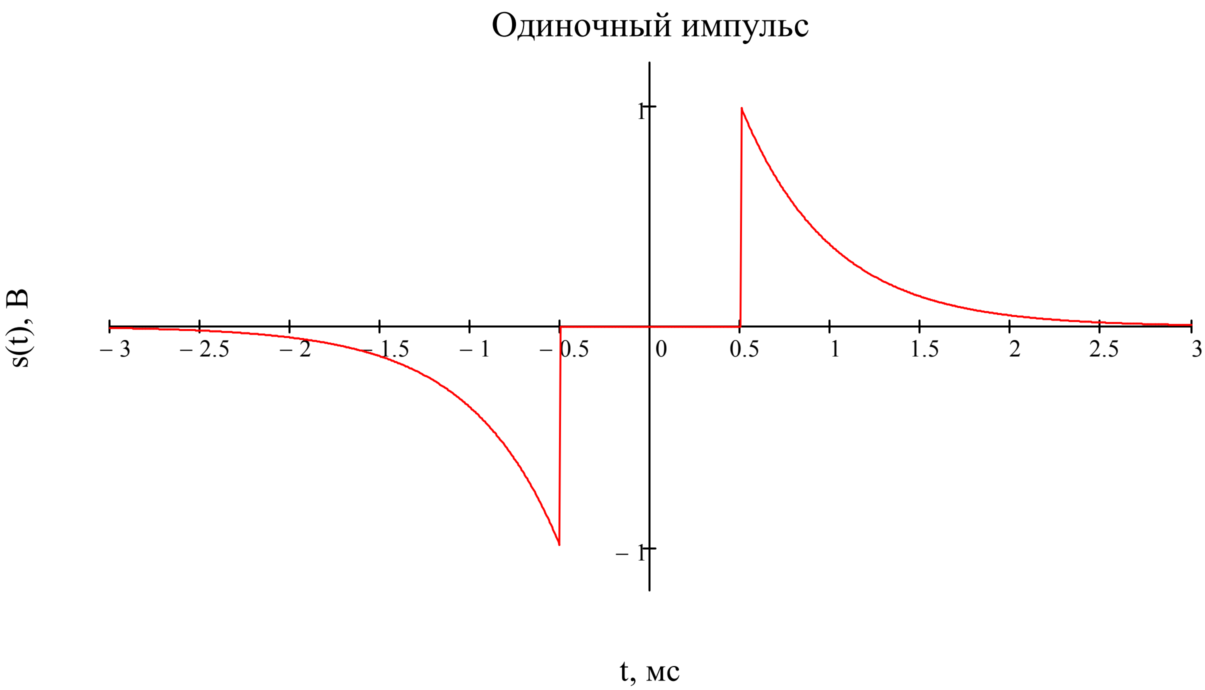
Одиночный импульс, из которого состоит периодический сигнал:

Амплитуда импульса $A := 1$ В

Запаздывание импульса $\Delta := \frac{1}{2}$ мс

Постоянная времени импульса $\alpha := \frac{1}{\Delta}$ КГц

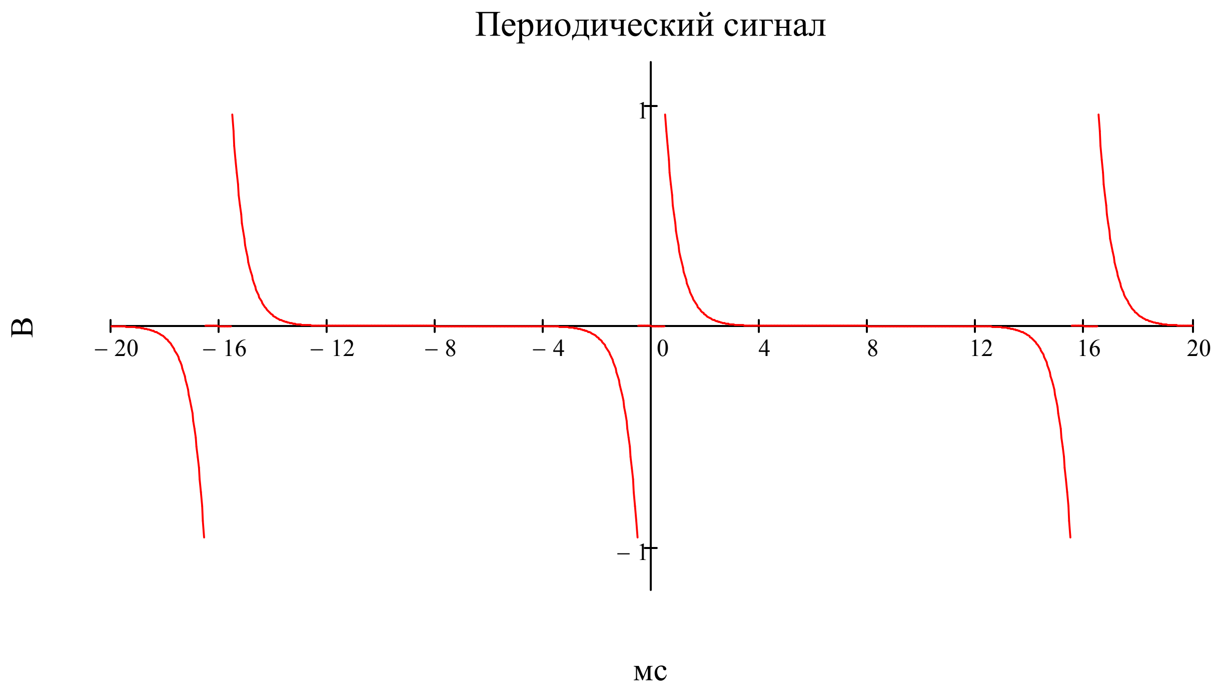
$$s(t) := \begin{vmatrix} -A \cdot e^{\alpha \cdot (t+\Delta)} & \text{if } t \le \Delta \\ A \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\Delta)} & \text{if } t \ge \Delta \\ 0 \text{ if } |t| < \Delta \end{vmatrix}$$



Пусть период сигнала будет в 4 раза больше, чем физическая длительность одиночного импульса. Так как одиночный импульс состоит из двух экспонент, сдвинутых относительно оси ОУ на -Δ и +Δ влево и вправо соответственно, а физическая длительность экспоненты равна 3Δ, то его длительность равна 8Δ

$T := 4 \cdot (8 \cdot \Delta) = 1$ мс

$$sT(t) := \sum_{m=-10}^{10} s(t - m \cdot T)$$

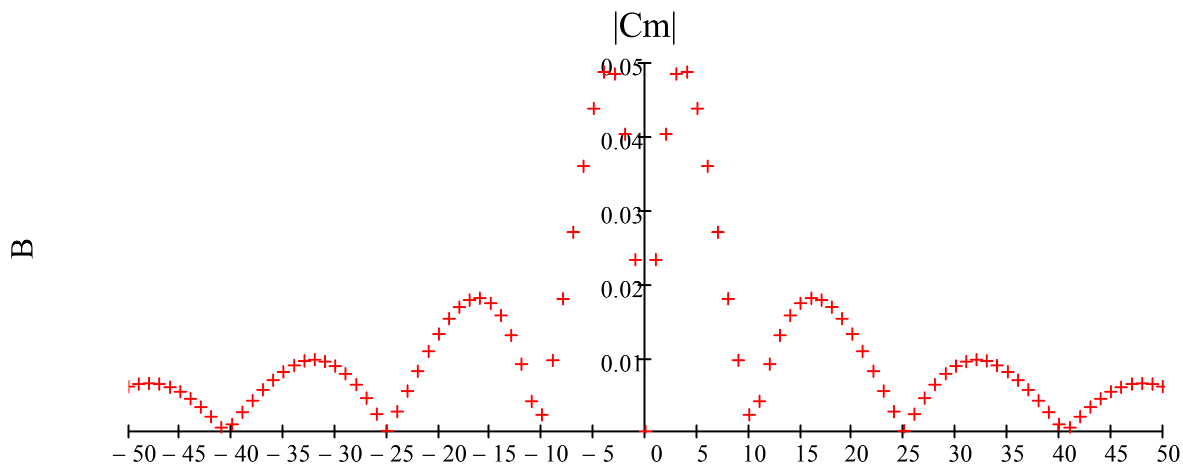


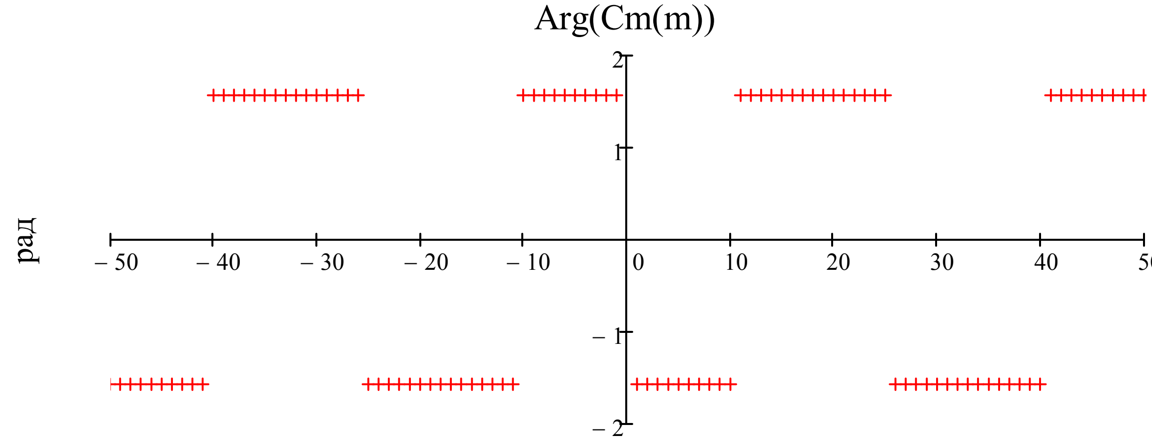
2. Спектр периодического сигнала.

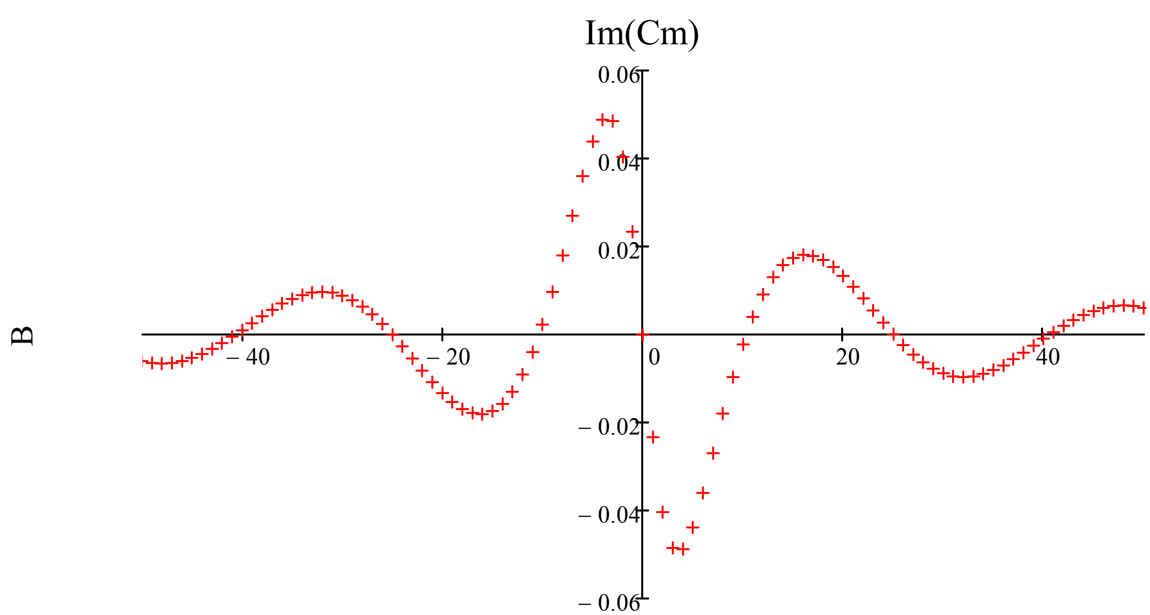
Комплексная форма:

$$Cm(m) := \frac{1}{T}\left[\frac{-2A \cdot \left(\alpha \sin\left(2\pi \frac{m}{T} \cdot \Delta\right) + 2\pi \frac{m}{T} \cdot \cos\left(2\pi \frac{m}{T} \cdot \Delta\right)\right) \cdot i}{\alpha^2 + \left(2\pi \frac{m}{T}\right)^2}\right]$$

$m := -1000 .. 1000$


|Cm|
B
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
− 50 − 45 − 40 − 35 − 30 − 25 − 20 − 15 − 10 − 5 0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50

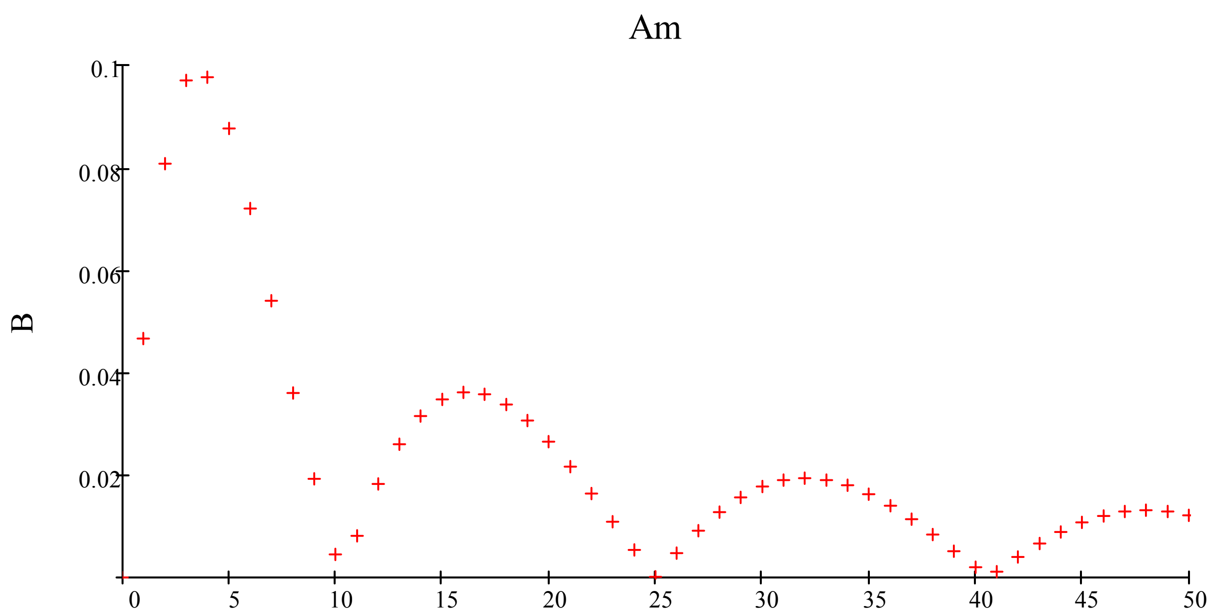

Arg(Cm(m))
рад
2
1
− 1
− 2
− 50 − 40 − 30 − 20 − 10 0 10 20 30 40 50

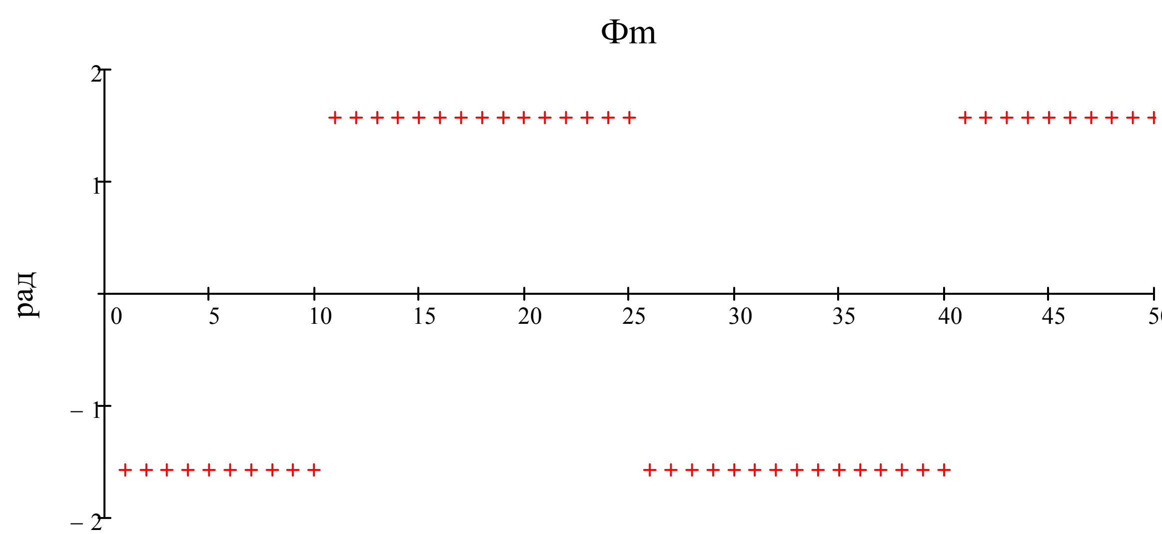

Im(Cm)
B
0.06
0.04
0.02
− 0.02
− 0.04
− 0.06
− 40 − 20 0 20 40

Амплитудно-фазовая форма:

$$Am(m) := \begin{cases} 2\left|Cm(m)\right| & \text{if } m > 0 \\ 0 & \text{if } m < 0 \\ \left|Cm(m)\right| & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi m(m) := \begin{cases} \arg(Cm(m)) & \text{if } m \ge 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

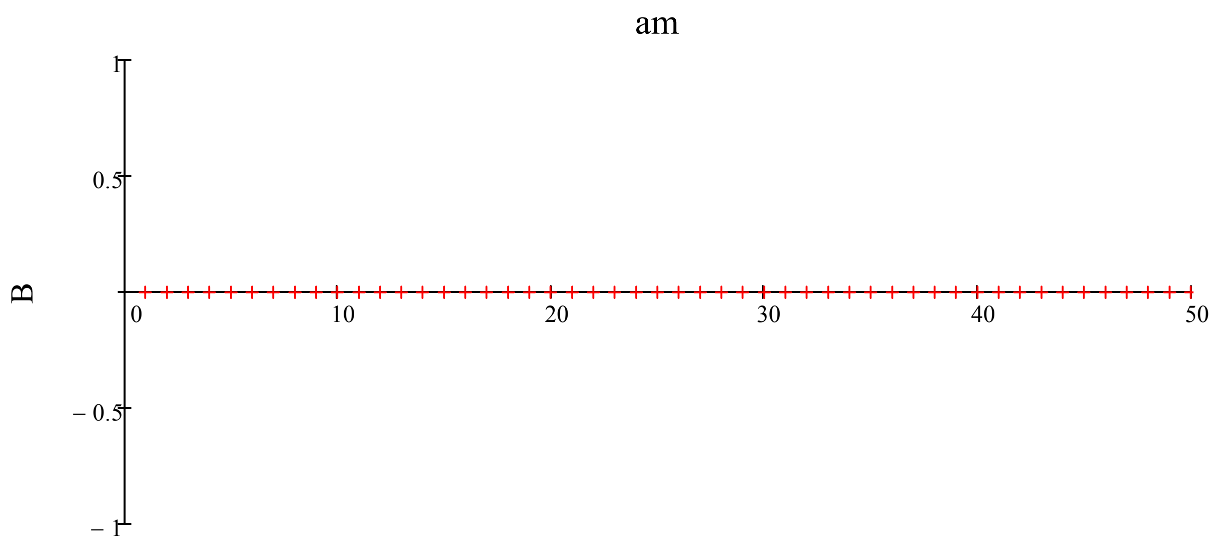


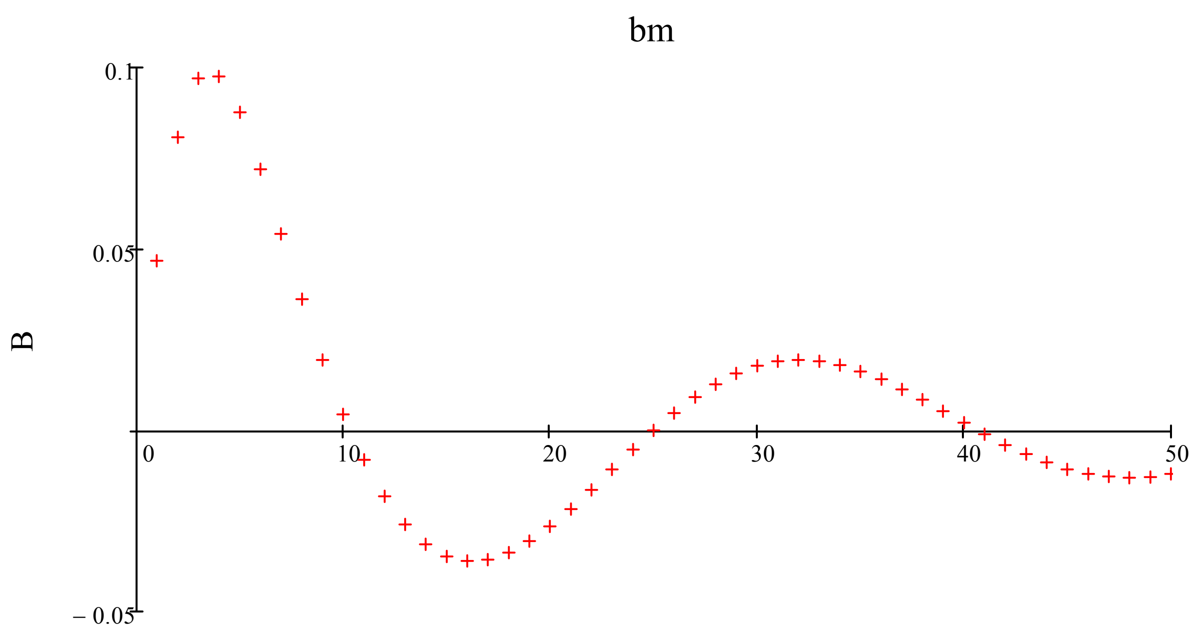


Квадратурная форма:

$$am(m) := Am(m)\cos(\phi m(m))$$

$$bm(m) := -Am(m)\sin(\phi m(m))$$

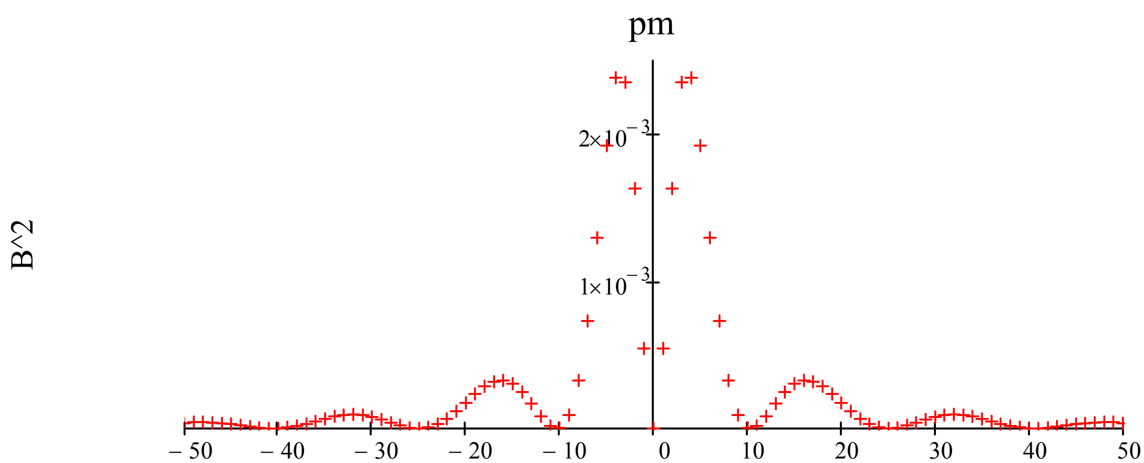




3. Спектр мощности периодического сигнала

$$pm(m) := \left(\left|Cm(m)\right|\right)^2$$

$$pm(m) := \left[\left|\frac{1}{T}\left[\frac{-2A\cdot\left(\alpha\sin\left(2\pi\frac{m}{T}\cdot\Delta\right)+2\pi\frac{m}{T}\cdot\cos\left(2\pi\frac{m}{T}\cdot\Delta\right)\right)\cdot i}{\alpha^2+\left(2\pi\frac{m}{T}\right)^2}\right]\right|\right]^2$$



4. Средняя мощность периодического сигнала.

Определим среднюю мощность по сигналу:

$$Pcp := \frac{1}{T}\cdot\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\left|sT(t)\right|\right)^2 dt = 0.031\,B^2$$

Определим среднюю мощность по спектру мощности:

$$Pcp := \sum_{m=-1000}^{1000} pm(m) = 0.031 \qquad B^2$$

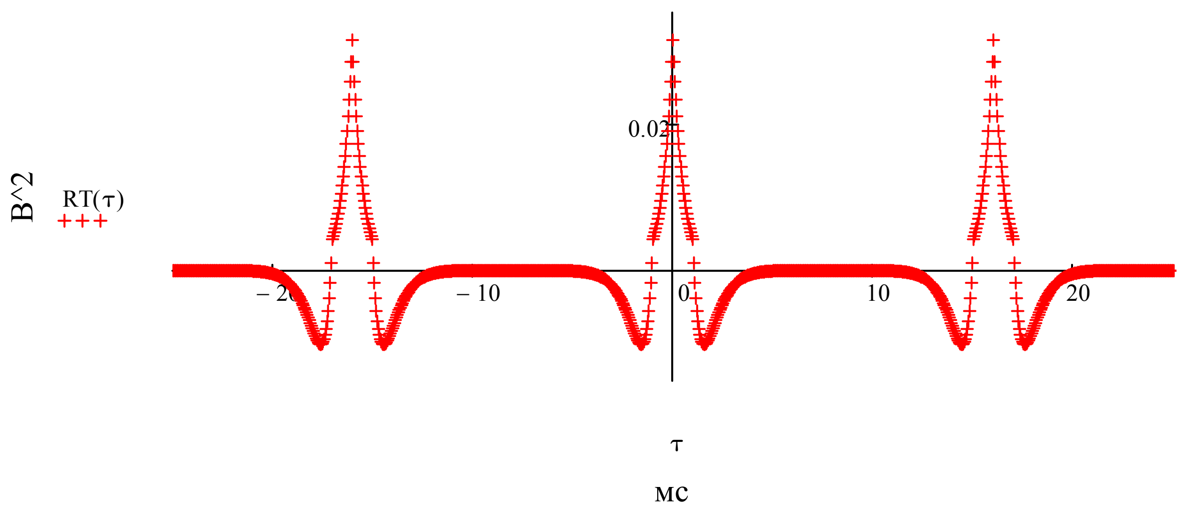
5. АКФ периодического сигнала

АКФ одиночного импульсы

$$RT(\tau) := \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-1000}^{1000} R(\tau - n \cdot T)$$,где

$$R(\tau) := \begin{cases} \frac{A^2}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|} & \text{if } 0 \le |\tau| \le 2\Delta \\ \frac{A e^{-\alpha \cdot |\tau|}}{\alpha} - e^{-\alpha \cdot (|\tau| - 2\Delta)} \cdot (|\tau| - 2\Delta) & \text{if } |\tau| > 2\Delta \end{cases}$$

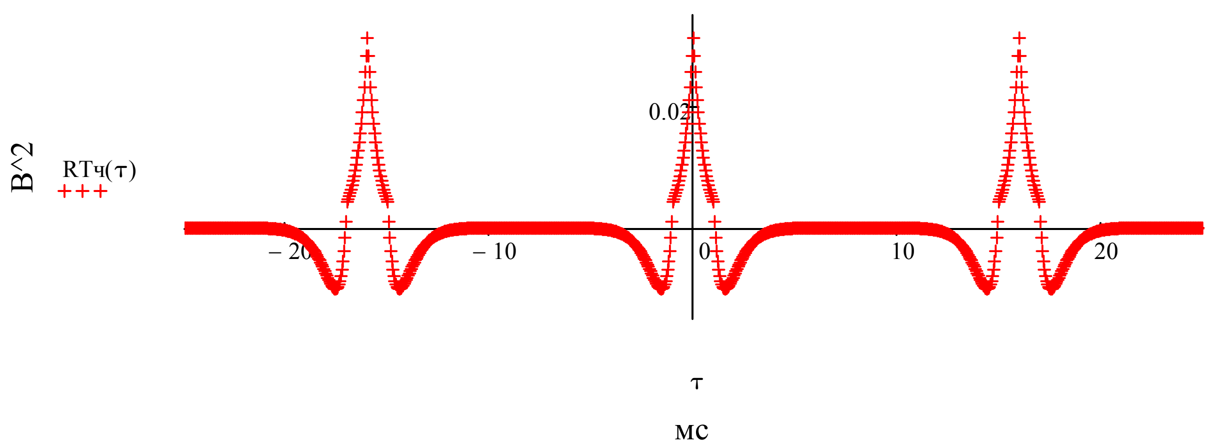
АКФ периодического сигнала



$RT(0) = 0.031$ $\quad B^2$

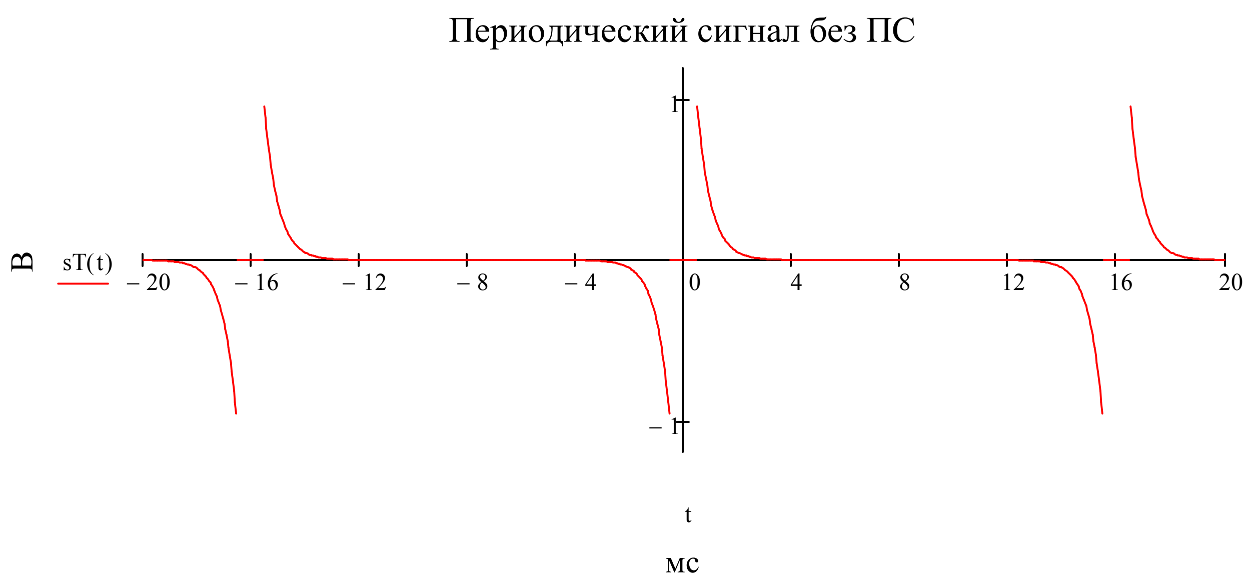
$$RTч(\tau) := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T sT(t) \cdot sT(t - \tau)\, dt$$

АКФ периодического сигнала, построенная численно

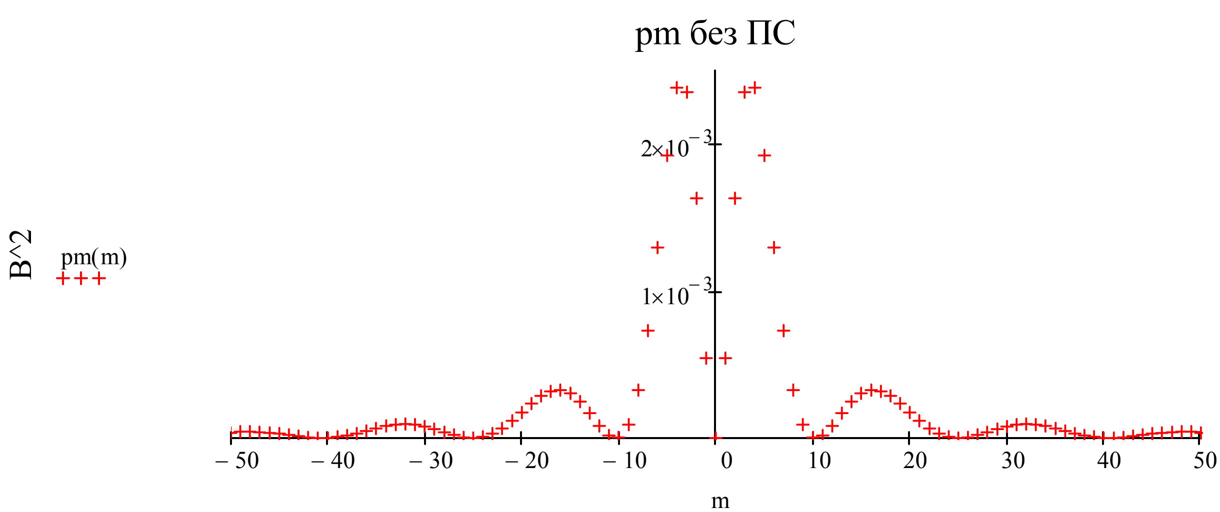


6. Исключение периодической составляющей.

$sT(t) := sT(t) - Cm(0)$



$pm(m) := (|Cm(m)|)^2 - Cm(0)$



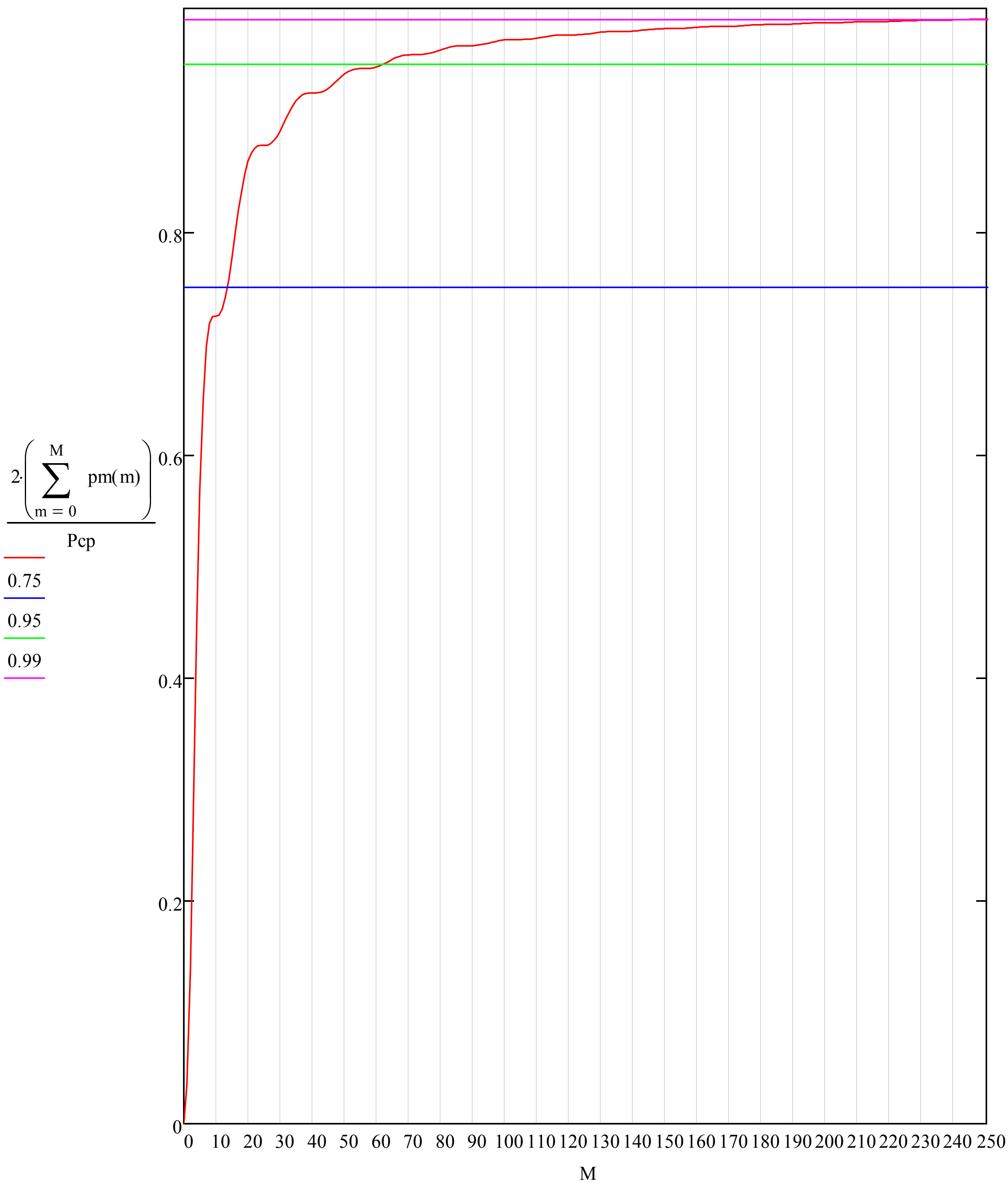
$$Pcp := \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} (|sT(t)|)^2 \, dt = 0.031 B^2$$

$$Pcp := \sum_{m=-1000}^{1000} pm(m) = 0.031 \quad B^2$$

7. Определим количество гармоник, которые составляют не менее 75, 95 и 99% мощности сигнала.

$$M := 0 .. 300$$

Зависимость мощности сигнала от количества гармоник



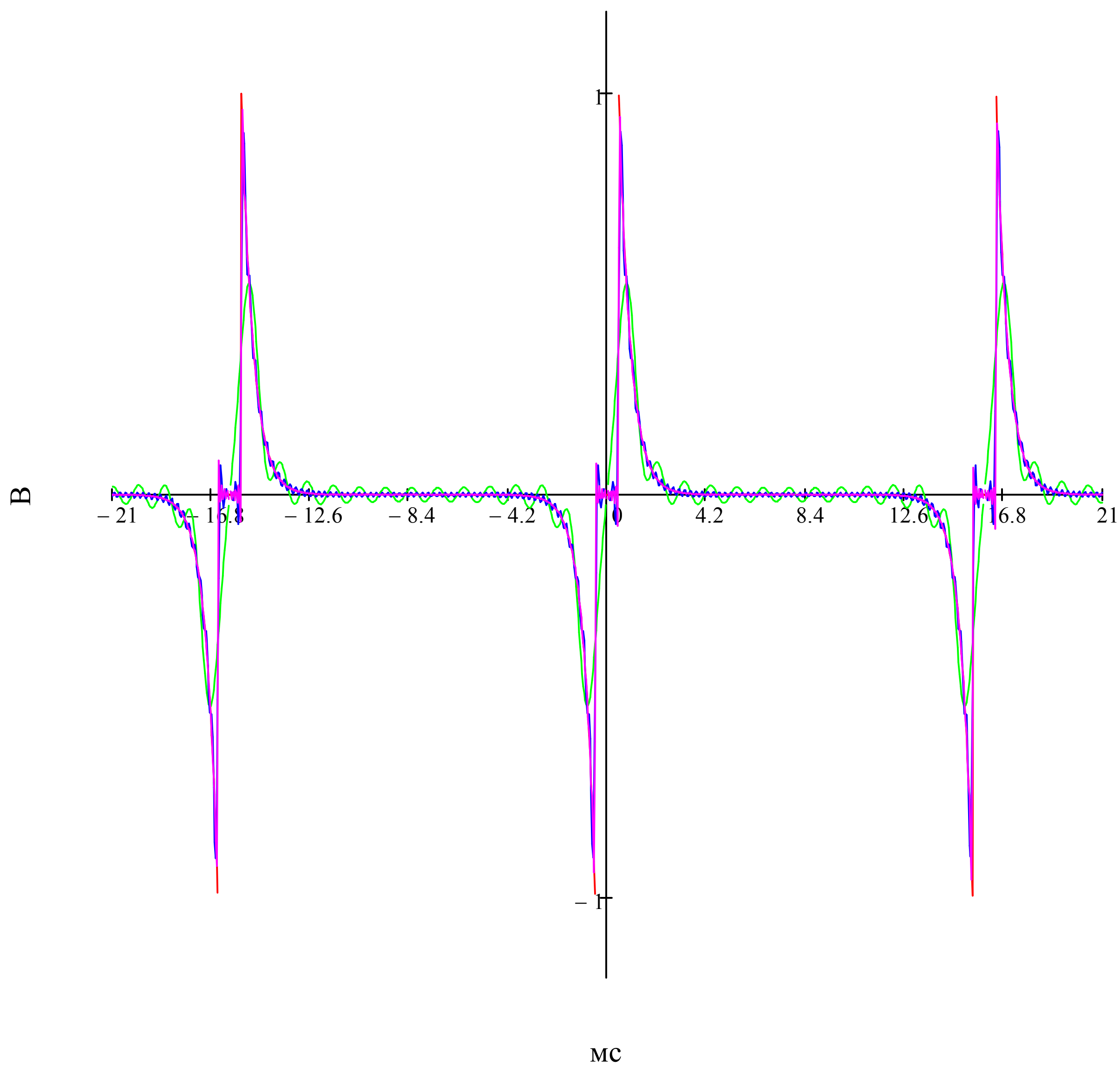
$M75 := 14 \quad M95 := 65 \quad M99 := 245$

8. Восстановим периодические сигналы по гармоникам, определенным в предыдущем пункте.

$$sT75(t) := \sum_{m=-M75}^{M75} \left(Cm(m) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{T} \cdot t} \right) \qquad sT95(t) := \sum_{m=-M95}^{M95} \left(Cm(m) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{T} \cdot t} \right)$$

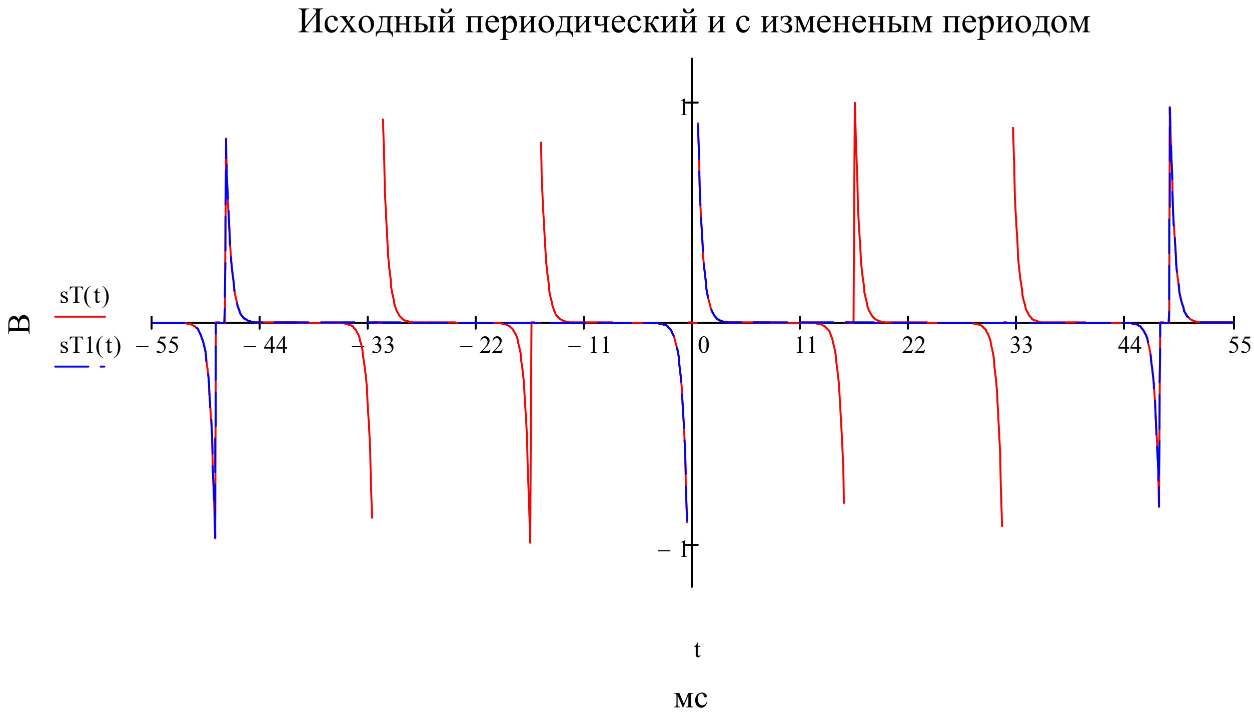
$$sT99(t) := \sum_{m=-M99}^{M99} \left(Cm(m) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{T} \cdot t} \right)$$

Исходный сигнал, и восстановленые из части гармоник



9. Увеличим период сигнала в 3 раза.

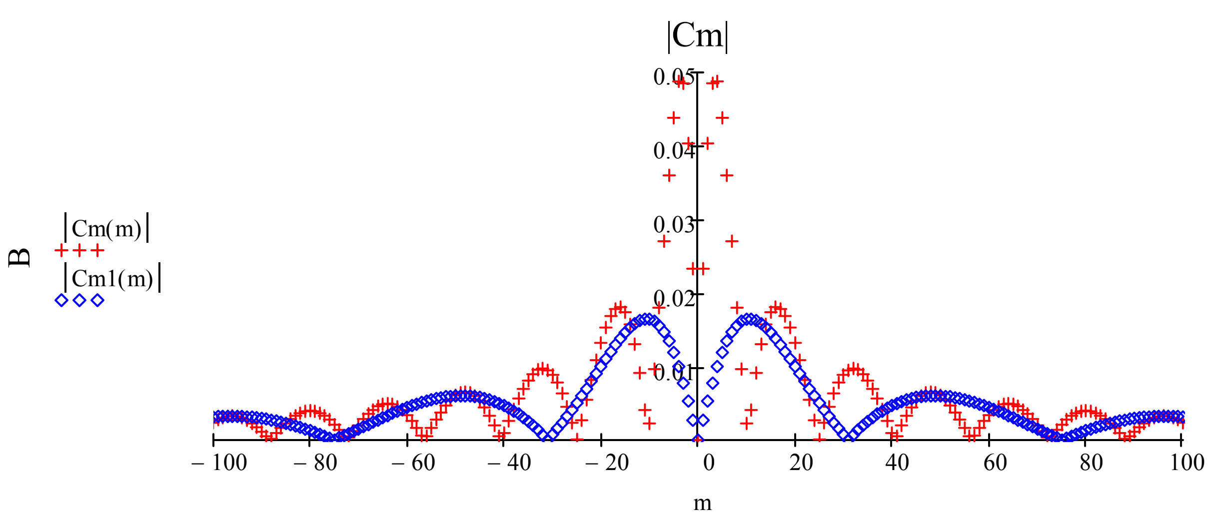
$T := 3 \cdot T = 48$ мс $\qquad sT1(t) := \sum_{m=-30}^{30} s(t - m \cdot T)$

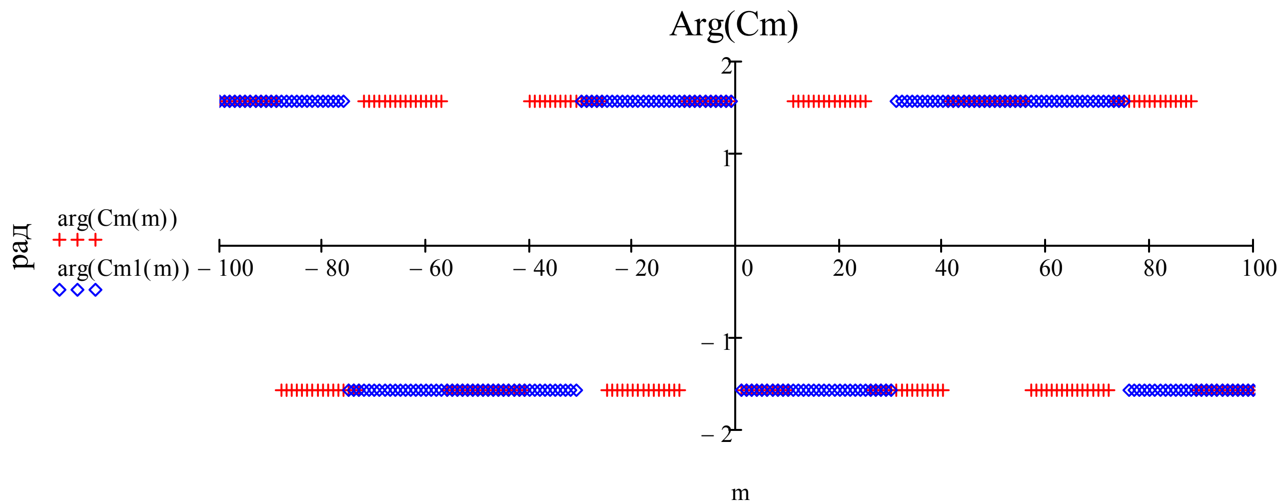


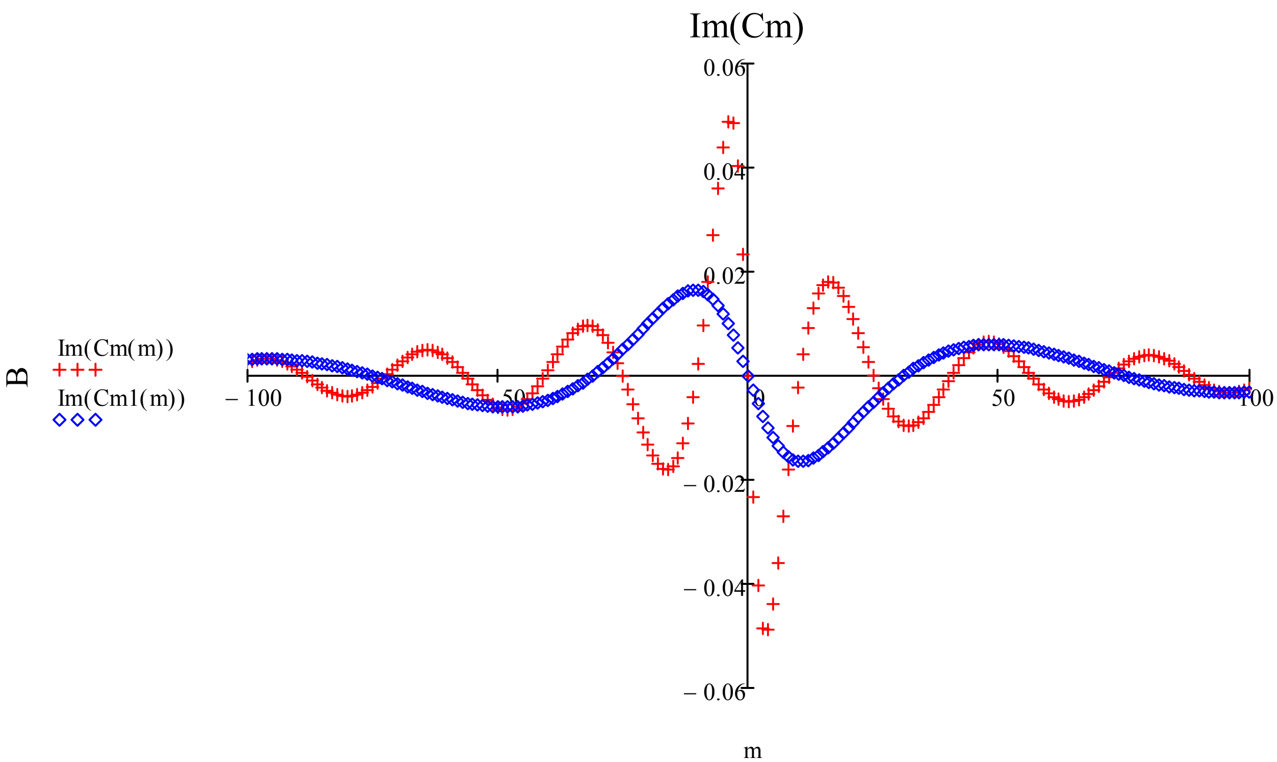
Комплексная форма:

$m := -1000 .. 1000$

$$Cm1(m) := \frac{1}{T}\left[\frac{-2A \cdot \left(\alpha \sin\left(2\pi \frac{m}{T} \cdot \Delta\right) + 2\pi \frac{m}{T} \cdot \cos\left(2\pi \frac{m}{T} \cdot \Delta\right)\right) \cdot i}{\alpha^2 + \left(2\pi \frac{m}{T}\right)^2}\right]$$



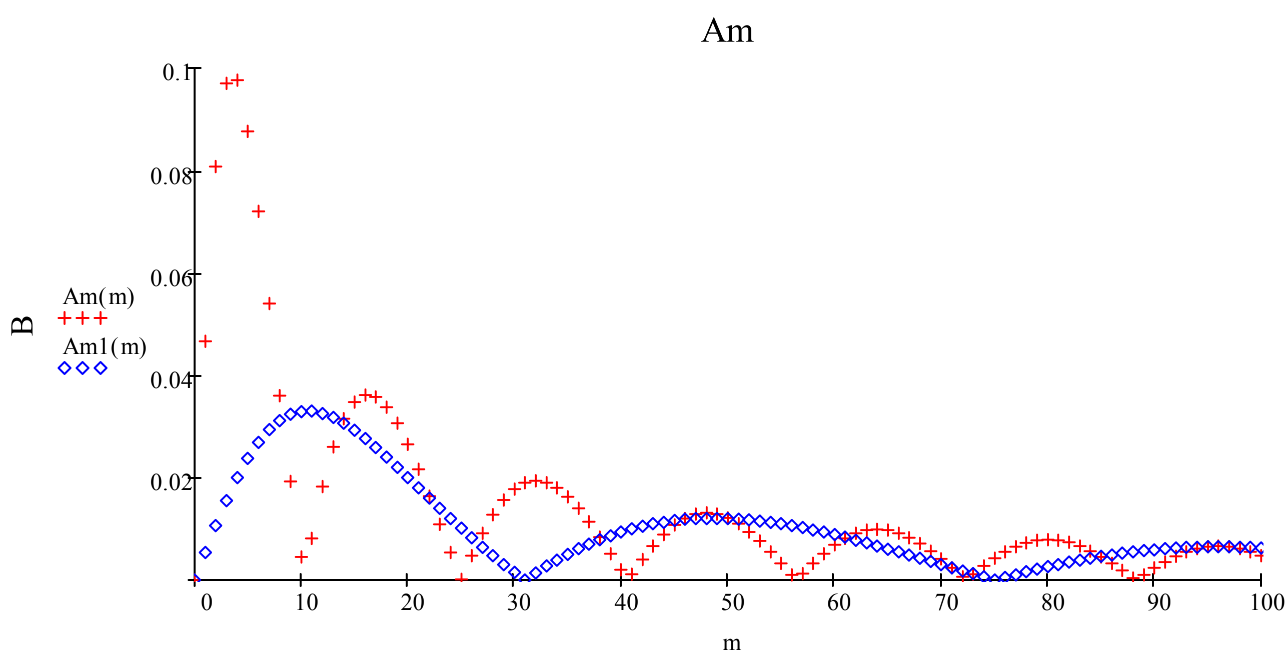

Arg(Cm)
2
1
− 1
− 2
рад
arg(Cm(m))
arg(Cm1(m))
− 100
− 80
− 60
− 40
− 20
0
20
40
60
80
100
m

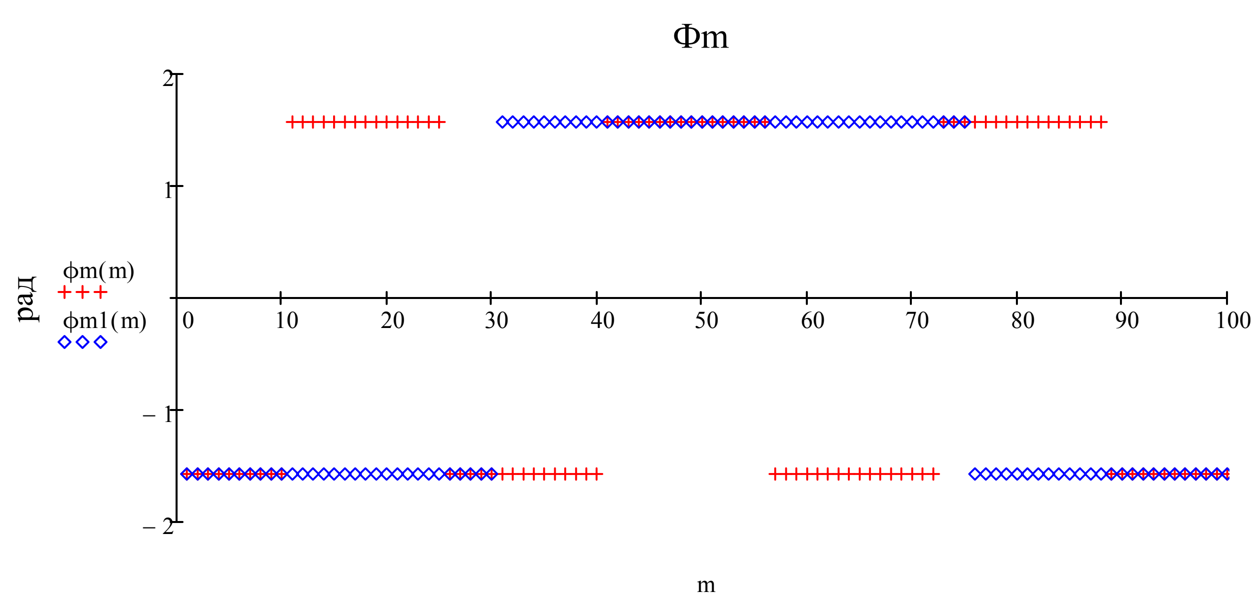

Im(Cm)
0.06
0.04
0.02
− 0.02
− 0.04
− 0.06
В
Im(Cm(m))
Im(Cm1(m))
− 100
50
0
50
100
m

Амплитудно-фазовая форма:

$$\mathrm{Am1}(m) := \begin{cases} 2\left|\mathrm{Cm1}(m)\right| & \text{if } m > 0 \\ 0 & \text{if } m < 0 \\ \left|\mathrm{Cm1}(m)\right| & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi\mathrm{m1}(m) := \begin{cases} \arg(\mathrm{Cm1}(m)) & \text{if } m \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

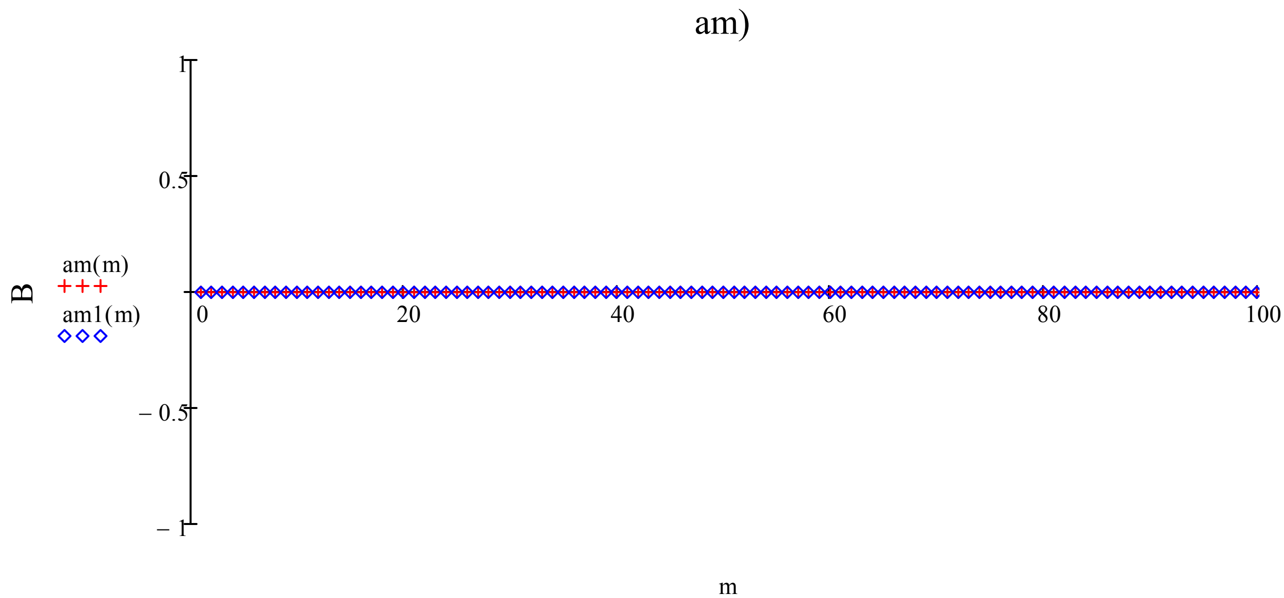


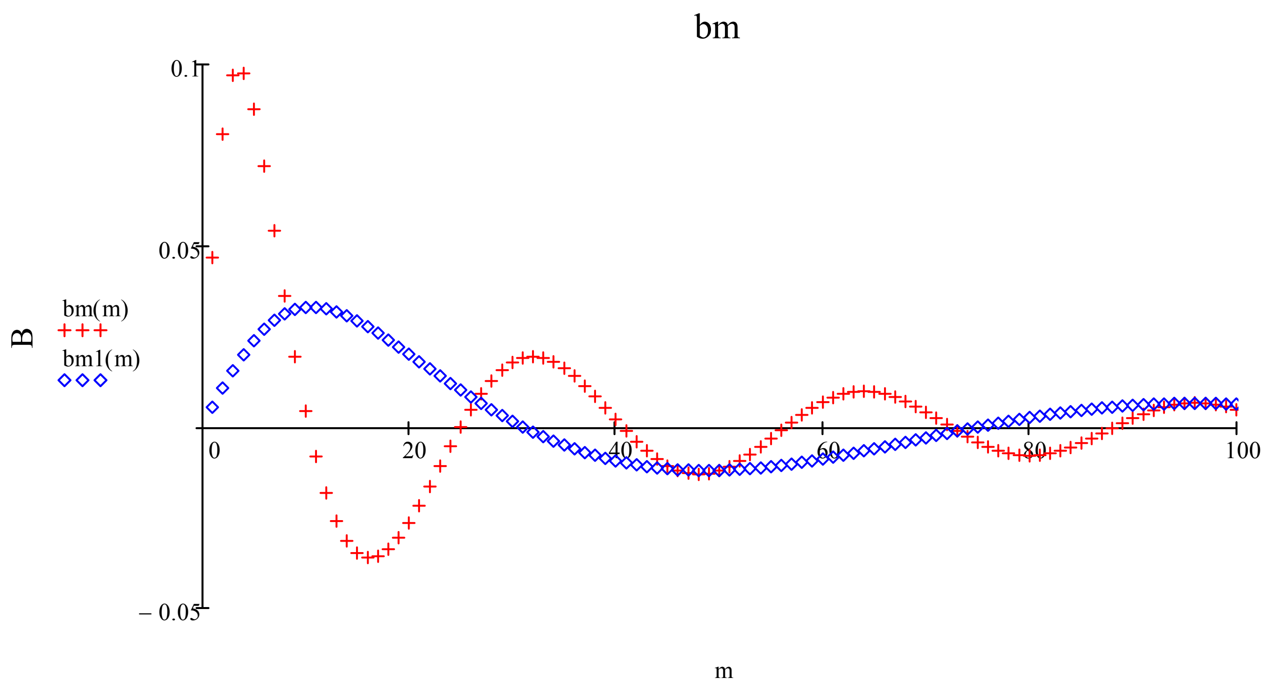


Квадратурная форма:

$$am1(m) := Am1(m)\cos(\phi m1(m))$$

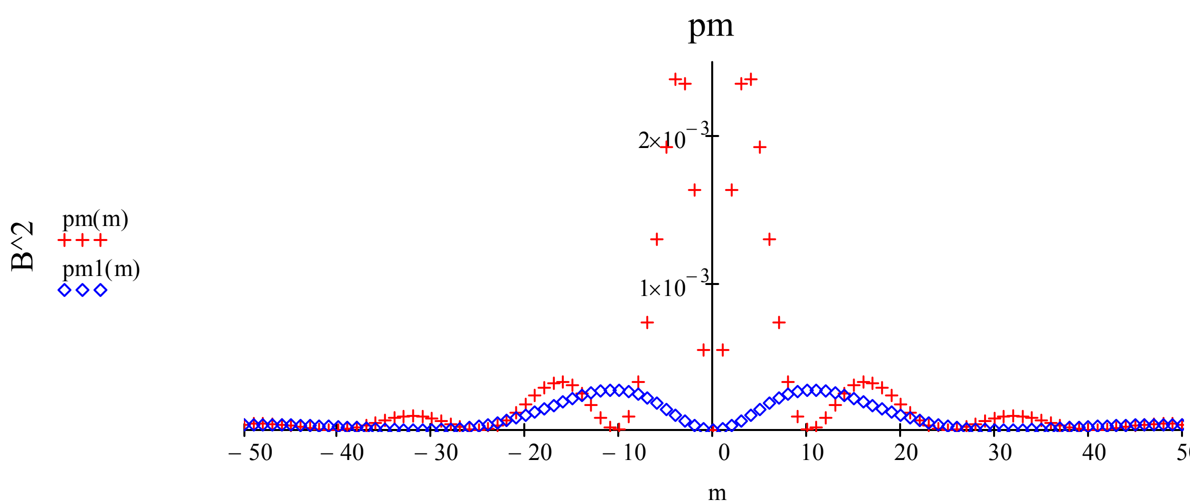
$$bm1(m) := -Am1(m)\sin(\phi m1(m))$$



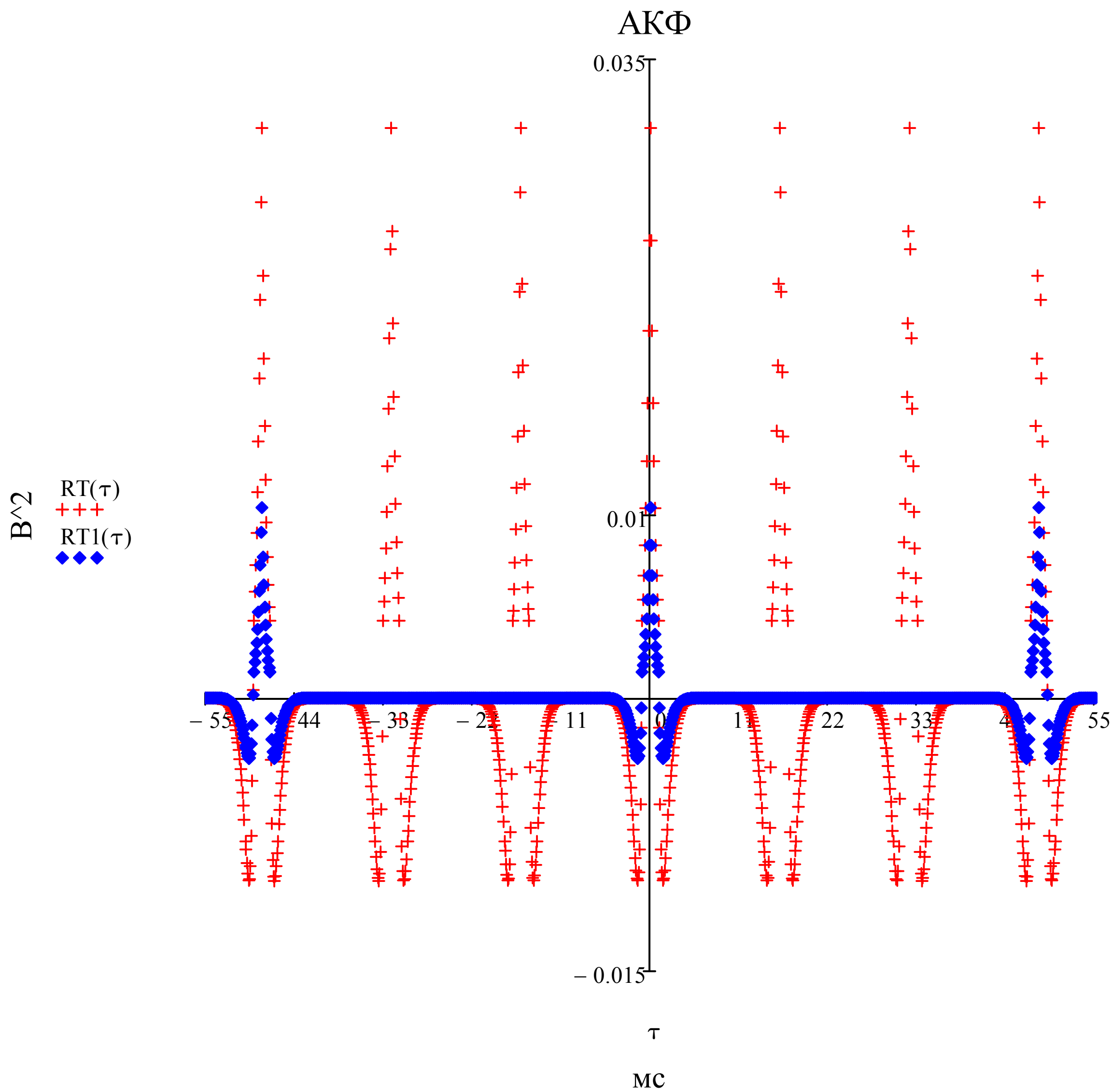


$$pm1(m) := \left(\left|Cm1(m)\right|\right)^2$$

$$pm1(m) := \left[\left|\frac{1}{T}\left[\frac{-2A\cdot\left(\alpha\sin\left(2\pi\frac{m}{T}\cdot\Delta\right)+2\pi\frac{m}{T}\cdot\cos\left(2\pi\frac{m}{T}\cdot\Delta\right)\right)\cdot i}{\alpha^2+\left(2\pi\frac{m}{T}\right)^2}\right]\right|\right]^2$$



$$RT1(\tau) := \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-10}^{10} R(\tau - n \cdot T)$$



$$Pcp1 := \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\left|sT1(t)\right|\right)^2 dt = 0.01\,B^2$$

$$Pcp1 := \sum_{m=-300}^{300} pm1(m) = 0.01B^2$$

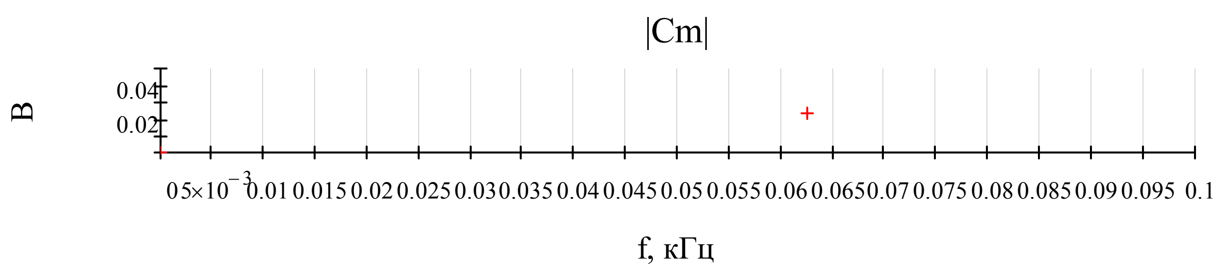
$$Pcp1 := RT1(0) = 0.01\,B^2$$

10. Выводы.

При анализе заданного периодического сигнала можно отметить следующее:

1. Значение средней мощности, рассчитанное по сигналу, равна значению, рассчитанному по спектру мощности и составляет $31*10^{-3}$ В^2. Это следует из теоремы Парсеваля. Так же значение АКФ в нуле равно $31*10$-^{3} В^2.Так как АКФ связана со спектром мощности ПФ и для двух этих функций работает свойство площади, то есть площадь под спектром мощности (что и является средней мощностью сигнала) равно значению АКФ в нуле. Период АКФ равен периоду сигнала.

2. Площадь периодического сигнала равна значению спектра в нуле, так как она равна нулю, Постоянная составляющая сигнала: Cm(0)=0. Так же как и у одиночного импульса, спектр периодического сигнала имеет только мнимую часть, но принимает дискретные значения. Расстояния между δ-функциями составляют m/T. Если посмотреть на график |Cm|, расположенный ниже, можно увидеть, что это расстояние примерно равно 62,5 Гц. период и частота имеют обратно пропорциональную зависимость, таким образом, мы получаем: 1/62,5=16 мс - период заданного периодического сигнала.



3. Если посмотреть на квадратурную форму, можно заметить, что отсутствует косинусойдная составляющая сигнала. Так же по комплексной форме видно, что из-за ее нечетной симметрии, гармоники косинуса тоже отсутствуют. Это объясняется тем, что одиночный импульс чисто действительная и нечетная функция.

4. Если обратить внимание на сигналы восстановленные из спектра вблизи скачков, можно увидеть эффект Гиббса, так же как и у одиночного импульса.

5. Так как спектр периодических сигналов дискретная функция, то и спектр мощности и АКФ также являются дискретными.

При анализе изменений характеристик сигнала, вследствие увеличения периода в 3 раза, можно сделать следующие выводы:

1. Расстояние между δ-функциями спектра сигнала уменьшилось в 3 раза, значит, частота колебания синусов составляет примерно 21 Гц, что меньше исходных 62,5 Гц. То есть при увеличении периода сигнала, частота колебания гармоник уменьшается, и наоборот.

2. Спектр и соответственно спектр мощности сигнала стали более "широкими" (примерно в 3 раза) функциями, значит, для более точного восстановления сигнал из спектра нужно будет охватывать в 3 раза больше гармоник. Средняя мощность уменьшилась примерно в 3 раза и составляет 10^{-2} В^2.

3. Значение АКФ в нуле уменьшилось в 3 раза, что соответствует изменению средней мощности и составляет 10^{-2} В^2 . Ее период увеличился по сравнению с исходным в 3 раза и составляет 84 мс.